

6 Fonctions puissances d'exposant rationnel

I - Définition et propriétés

Définition 1. r étant un nombre rationnel non nul, on appelle *fonction puissance d'exposant r* , la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^r \end{array}$$

Notation 2. $x^r = e^{r \ln x}$

Propriété 3. 1. r et r' étant des nombres rationnels non nuls, x et y des réels strictement positifs.

$$\begin{aligned} - & x^r \times y^r = (xy)^r \\ - & (x^r)^{r'} = x^{rr'} \\ - & \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r \\ - & x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \end{aligned}$$

II - Dérivabilité

La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car composée des deux fonctions dérivables : $x \mapsto r \ln x$ et $x \mapsto e^x$.

On a : $\forall x > 0, (x^r)' = (e^{r \ln x})' = \frac{r}{x} \times e^{r \ln x} = \frac{r}{x} \times x^r = r x^{r-1}$.

Ainsi la fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto r x^{r-1}$.

III - Fonction composée

Soit r un rationnel et u une fonction strictement positive sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto (u(x))^r$ est la composée de la fonction $x \mapsto u(x)$ suivie de la fonction $x \mapsto x^r$.

De plus on a : $(u(x))^r = e^{r \ln(u(x))}$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété 4. Soit r un rationnel et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction u^r est dérivable sur I et on a : $(u^r)' = r u' u^{r-1}$

Exemple 5. $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow 2x+1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ donc f est dérivable sur $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$

$$f(x) = \sqrt[3]{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

Conséquence 6. Soit r un rationnel différent de -1 et u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction $u' u^r$ admet pour primitives sur I les fonctions $\frac{u^{r+1}}{r+1} + C$.

Exemple 7. La fonction $x \mapsto 2x(3-x^2)^{\frac{1}{4}}$ admet pour primitives sur $\left] -\sqrt{3}, \sqrt{3} \right[$ les fonctions $x \mapsto -\frac{(3-x^2)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C$

IV - Croissances comparées

Propriété 8. Soit α un rationnel strictement positif. On a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Remarque 9. Lorsqu'on ne peut pas conclure directement, on peut conjecturer la limite d'une fonction comportant des fonctions logarithmes, puissances ou exponentielles en remarquant que :

- la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction puissance.
- la fonction puissance « l'emporte » sur la fonction logarithme.

Démonstration

- Posons : $X = x^\alpha$ on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X} = 0$
- Posons : $X = x^\alpha$ on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} x^\alpha \ln x^\alpha = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} X \ln X = 0$
- Posons : $X = \frac{x}{\alpha}$ on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}} \right)^\alpha = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{e^X}{X} \right)^\alpha = +\infty$

$$\text{— On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^\alpha}} = 0$$

Exemple 10. — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} \right]$, or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} \right) = 1 - 0 = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \ln x = +\infty$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left(\frac{e^x}{\ln x} - 1 \right) \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$\text{Par suite } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left(\frac{e^x}{\ln x} - 1 \right) = +\infty$$

$$\text{— } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}. \text{ On a : } \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln n}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \text{ par composée, } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^0 = 1 \text{ il vient : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$