

6 Fonction exponentielle (TS2)

Introduction

La fonction $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \ln x$ est continue et strictement croissante.

Elle admet une **bijection réciproque** de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$.

I - Définition et propriétés

Définition 1. On appelle fonction exponentielle, notée $\exp$ ou e , la bijection réciproque de la fonction $\ln$.

Notation 2.

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto \exp(x) = e^x \end{aligned}$$

Conséquence 3. — $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- $\forall x > 0, e^{\ln x} = x$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \ln e^y = y$
- $\exp$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\exp$ est bijective et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'où :
- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a > e^b \iff a > b$

Propriété 4 (fondamentale).

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R} : e^{a+b} = e^a \times e^b$$

Démonstration

$$\ln(e^{a+b}) = a + b$$

$$\ln(e^a \times e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a + b$$

$$\text{D'où } e^{a+b} = e^a \times e^b$$

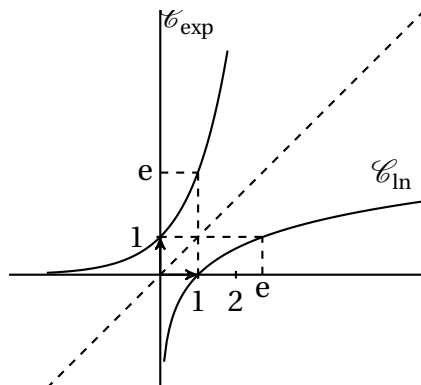
Conséquence 5. — $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

$$\text{— } e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$\text{— } (e^a)^r = e^{ra} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

II - Étude et représentation graphique

Les courbes de la fonction exp et de la fonction ln sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.



Limites

Aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction exp, on obtient les limites suivantes :

Propriété 6. — $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
 — $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Démonstration

- Soit φ la fonction définie par : $x \mapsto e^x - x - 1$.
 φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x > 0 \quad \varphi'(x) = e^x - 1 \geq 0$. φ est donc croissante sur $[0, +\infty[$ or $\varphi(0) = 0$.
 Donc $\forall x \geq 0, \varphi(x) \geq 0$ c-à-d $e^x \geq x + 1$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- Pour calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ posons $y = -x$
 On a alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = 0$

Tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	+	
e^x	0	$+\infty$

Dérivée

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$.

Dérivons les 2 membres de cette égalité.

$$\ln'(e^x) \times (e^x)' = 1$$

$$\frac{(e^x)'}{e^x} = 1 \iff (e^x)' = e^x$$

Propriété 7. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa propre dérivée :
 $(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Conséquence 8. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = (\exp'(u(x))) \times u'(x) = e^{u(x)} \times u'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$
 $(e^u)' = u' e^u$

La fonction $u' e^u$ a pour primitive sur I , toute fonction du type $e^u + C$ ($C \in \mathbb{R}$).

III - Quelques limites classiques

Propriété 9. — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
 — $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
 — $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration

- Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
 Pour $x > 0$, $\ln\left(\frac{e^x}{x}\right) = \ln e^x - \ln x = x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ d'où par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$
- Montrons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
 En posant $X = -x$, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -X e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-X}{e^X} = 0$
- Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
 Soit $\varphi(x) = e^x$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0) = e^0 = 1$