4 Logarithme népérien (TS2)

I - Définition et propriétés

Définition 1. On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la primitive sur $]0\,,\,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et qui s'annule pour $x = 1$.

La touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice permet de calculer le logarithme d'un réel.

Conséquences immédiates

1. Le domaine de définition de la fonction ln est $]0\,,\,+\infty[$.
2. La fonction ln est dérivable sur $]0\,,\,+\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
3. $\ln(1) = 0$.
4. La dérivée de la fonction ln étant strictement positive sur $]0\,,\,+\infty[$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,,\,+\infty[$.

Propriété 2.

$$\begin{aligned} \forall a > 0, \quad \forall b > 0, \quad a < b &\Longleftrightarrow \ln a < \ln b \\ a > b &\Longleftrightarrow \ln a > \ln b \\ a = b &\Longleftrightarrow \ln a = \ln b \end{aligned}$$

Propriété 3 (fondamentale)**.**

$$\text{Pour tous} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0, \ \text{on a} \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Démonstration
Soit la fonction $g : x \mapsto \ln(ax)$ où $a > 0$ et fixé.
g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée, on a :
$\forall x > 0,\ g'(x) = (ax)' \ln'(ax) = a \times \dfrac{1}{ax} = \dfrac{1}{x}$
On a donc $(g - \ln)'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = 0$ donc $(g - \ln)'(x) = 0$.
Il en résulte que la fonction $g - \ln$ est une constante sur $]0, +\infty[$.
Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0;\ g(x) - \ln(x) = k \Leftrightarrow \ln(ax) - \ln x = k$
Pour $x = 1$ on a $\ln a - ln 1 = k$ donc $k = \ln a$. D'où $\ln(ax) = \ln x + \ln a$.

Conséquence 4. Soit $a > 0$ et $b > 0$.

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$

2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$
4. $\ln a^r = r\ln a \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

Démonstration

1. $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0 = \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) + \ln a$ d'où $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\sqrt{a}$ d'où $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.
4. Pour $n = 0$ on a $\ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln a$
   Supposons la propriété vraie pour un entier naturel n quelconque.
   On a $\ln a^{n+1} = \ln a^n \times a = \ln a^n + \ln a = n\ln a + \ln a = (n+1)\ln a$
   Il en résulte que la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Supposons que $n \in \mathbb{Z}^-$. Posons $p = -n$ donc $p \in \mathbb{N}$.
   $\ln a^n = \ln a^{-p} = \ln\dfrac{1}{a^p} = -\ln a^p = -p\ln a = n\ln a$
   Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}^-$ on a $\ln a^n = n\ln a$.
   Soit $p \in \mathbb{N}^*$ on a $\ln(a)^{\frac{p}{p}} = p\ln a^{\frac{1}{p}} = \ln a$ d'où $\ln a^{\frac{1}{p}} = \dfrac{1}{p}\ln a$
   Soit $r = \dfrac{n}{p} \in \mathbb{Q}$ alors $\ln(a)^{\frac{n}{p}} = n\ln a^{\frac{1}{p}} = n\left(\dfrac{1}{p}\ln a\right) = \dfrac{n}{p}\ln a = r\ln a$

II - Étude de la fonction ln

Limites

Les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction ln, sont données ci-dessous :

Propriété 5. — $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

— $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Démonstration

— La fonction ln est croissante et n'est pas majorée sur $]0\,,\,+\infty[$.
Si elle était majorée sur $]0\,,\,+\infty[$, elle admettrait une limite finie L en $+\infty$. En posant $X = 5x$, on obtiendrait :
$L = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln 5x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln 5 + \ln x = \ln 5 + L$, on aboutit à une contradiction.

— Pour la limite en 0^+, on fait le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln\dfrac{1}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} (-\ln X) = -\infty$

Tableau de variation

Des propriétés précédentes, on en déduit facilement le tableau de variation suivant.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln'(x)$	$+$
$\ln(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Conséquences

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0\,,\,+\infty[$ cela entraîne que c'est une bijection de $]0\,,\,+\infty[$ vers $\ln(]0\,,\,+\infty[) = \mathbb{R}$.
Donc $\forall y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in\,]0\,,\,+\infty[$ tel que $\ln x = y$. En particulier il existe un unique réel noté e tel que : $\ln \mathrm{e} = 1$. On démontre que $\mathrm{e} \approx 2,718$ et que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.
e est appelé la **constante d'Euler**.
On a alors $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\ln \mathrm{e}^r = r \ln \mathrm{e} = r$
Ainsi :

$\ln x = r \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^r$	$\ln x > r \Longleftrightarrow x > \mathrm{e}^r$	$\ln x < r \Longleftrightarrow x < \mathrm{e}^r$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln x + 1 = \dfrac{6}{\ln x}$

Solution. Cette équation est définie lorsque : $x > 0$ et $\ln x \neq 0$ c-à-d $x \neq 1$.

Donc le domaine de résolution est $D =]0\,,\,1[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[$
Si $x \in D$ alors l'équation équivaut à $(\ln x)^2 + \ln x = 6$

Posons $X = \ln x$. On a : $X^2 + X - 6 = 0$ soit $X = 2$ ou $X = -3$

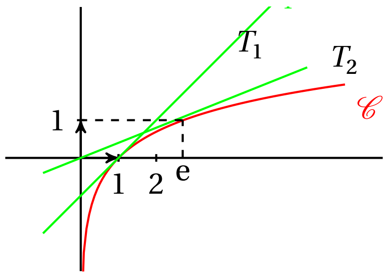
c-à-d $\ln x = 2$ ou $\ln x = -3$

D'où $x = \mathrm{e}^2$ ou $x = \mathrm{e}^{-3}$ d'où $S = \left\{\mathrm{e}^2,\, \mathrm{e}^{-3}\right\}$

□

Représentation graphique de la fonction ln

On construit les tangentes T_1 et T_2 à la courbe de ln respectives aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
$T_1 : y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$ soit $T_1 : y = x - 1$
$T_2 : y = \ln'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + \ln \mathrm{e}$ soit $T_2 : y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$



Dérivée de la fonction $\ln|u|$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que : $\forall x \in I,\ u(x) \neq 0$.
Donc la fonction $x : \longmapsto |u(x)|$ est dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$
Donc la fonction g= $\ln|u|$ est définie et dérivable sur I.

Si $u(x) > 0$: $g(x) = \ln u(x)$ et $g'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Si $u(x) < 0$: $g(x) = \ln(-u(x))$ et $g'(x) = -u'(x) \times \ln'(-u(x)) = \dfrac{-u'(x)}{-u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Dans tous les cas :
$(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$

Conséquence 7. — Si u est dérivable et strictement positive sur I alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I.

— Il en résulte que les primitives de la fonction $\dfrac{u'}{u}$, sont les fonctions du type $ln|u| + C$.

Quelques limites classiques

Propriété 8. — $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

— $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

— $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ ou $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

Démonstration

— Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
Soit g la fonction définie sur $[1\,,\,+\infty[$ par $g(x) = \ln x - x + 1$.
g est dérivable sur $[1\,,\,+\infty[$ et $\forall x > 1 \quad g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 < 0$ et g est donc strictement décroissante sur $[1\,,\,+\infty[$ or $g(1) = 0$.
D'où $\forall x > 1 \quad g(x) \leq 0$ soit $\ln x \leq x - 1$.
En particulier $\forall x > 1,\quad \ln\sqrt{x} \leq \sqrt{x} - 1 < \sqrt{x}$. D'où $\dfrac{1}{2}\ln x < \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \ln x < 2\sqrt{x}$
En divisant par x, on a $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ et d'après le théorème des gen-

darmes on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

— Montrons que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on obtient $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-\dfrac{\ln X}{X} \right) = 0$

— Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Soit $\varphi(x) = \ln(1+x)$. On a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$.

Par suite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0) = 1$

III - Fonction logarithme décimal

Définition 9. On appelle fonction logarithme décimal (ou de base 10), notée Log ou log , la fonction définie sur $]0\,,\,+\infty[$ par :

$$x \longmapsto \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Remarque 10. $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$