31 Calcul intégral

I - Primitives d'une fonction numérique

Activité d'introduction 1
Soit la fonction $f : x \longmapsto 2x + 3$.
Calcule la dérivée de chacune des fonctions F; G; H définies par :
$\mathrm{F}(x) = x^2 + 3x + 7$; $\mathrm{G}(x) = x^2 + 3x - 30$ et $\mathrm{H}(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 10$. Que remarques-tu ?

Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$, $\mathrm{H}'(x) = f(x)$, $\mathrm{G}'(x) = f(x)$.

On dit que F; G; H sont **des primitives de f sur Df**.

Définition 2
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle fonction primitive de f sur I , toute fonction F telle que :
pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Exemple 3
Vérifions que la fonction : $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x+5}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x} + 10\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+5)^2}$$

Pour cela dérivons la fonction F.
On a $F'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x+5) - \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{2x}+1)}{(\mathrm{e}^x+5)^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^{3x} + 10\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+5)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{3x} + 10\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+5)^2}$
Ainsi F est une primitive de f.

Propriété 4
Si F est une primitive de f sur I alors toute autre fonction de la forme $F(x) + c$ où c est une constante est aussi primitive de f sur I.

Primitives des fonctions usuelles

Fonctions f	Primitives F
a un réel	ax
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x

Opérations sur les primitives

Propriété 5
Si F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur I alors :

• F + G est une primitive de $f+g$ sur I.

• Pour tout réel k , kF est une primitive de kf sur I.

Le tableau suivant découle des règles de dérivation des fonctions.
u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Primitive
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u^n}$	$-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}}$

Exemple 6
Déterminons une primitive de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x)=x^2-2x+5$
2. $g(x)=2x(x^2+3)^2$
3. $h(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+2)^2$
4. $i(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$
5. $j(x)=2+\dfrac{3}{(3x+4)^2}$

6. $k(x) = x + 2 - \dfrac{4}{2x-2}$

Solution. 1. On a : $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x$

2. $g(x) = 2x(x^2+3)^2$ est de la forme $f(x) = u'u^n$.
   Par suite $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{3}(x^2+3)^3$.
3. $h(x) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+2)^2$ est de la forme $f(x) = u'u^n$.
   Par suite $H(x) = \dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^x+2)^3$.
4. $i(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ est de la forme $\dfrac{au'}{u}$.
   Par suite $\mathrm{I}(x) = \ln(\mathrm{e}^x+1)$.
5. $j(x) = 2 + \dfrac{3}{(3x+4)^2}$ est une somme de deux fonctions : l'une étant une constante égale à 2 et l'autre de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$.
   Par conséquent $\mathrm{J}(x) = 2x - \dfrac{1}{3x+4}$.
6. $k(x) = x + 2 - \dfrac{4}{2x-2}$ on fait la somme des deux primitives d'où :
   $\mathrm{K}(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(2x-2)$

□

II - Intégrale d'une fonction

Définition 7
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une de ces primitives, soient a et b deux réels de I.
Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f entre a et b et est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Ainsi on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Vocabulaire et notations

— Le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b f(x) dx »

— Le nombre a est appelé borne inférieure et b la borne supérieure de l'intégrale

— Pour toute primitive F de f, on écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
L'expression $[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$» pris entre a et b.

— Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre et on peut écrire $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. On dit que x est une variable muette, elle n'intervient pas dans le résultat.

Exemple 8
Calculons $\displaystyle\int_0^1 (x^2-1)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$.

- Une primitive de la fonction $x \longmapsto x^2-1$ sur $[0\,,\,1]$ est la fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 - x$

On a donc $\displaystyle\int_0^1 (x^2-1)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 = F(1) - F(0) = -\frac{2}{3}$.

- Une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $\mathrm{G} : x \longmapsto \frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2}$

On a donc $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = G(0) - G(-1) = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$

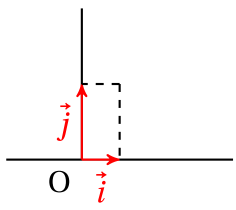
Propriétés de l'intégrale

Propriété 9
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant les réels a, b et c. Alors :

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
  (Relation de Chasles)
- $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;\ \ \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)+g(x)\mathrm{d}x$

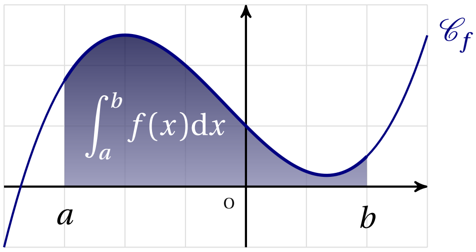
III - Calculs d'aires

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
L'unité d'aire notée par **u.a**, est l'aire du rectangle de dimensions $||\vec{i}||$ et $||\vec{j}||$.



Définition 10
Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a\,,\,b]$ et F une primitive de f sur $[a\,,\,b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est égale à l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

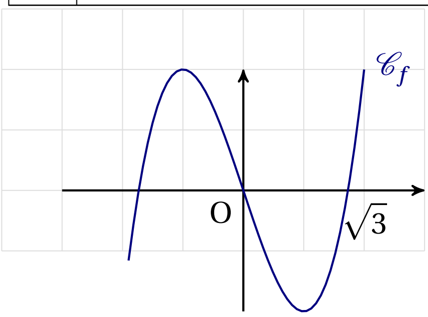


Remarque 11
Lorsque f une fonction continue et **négative** sur un intervalle $[a\,,\,b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est égale à l'intégrale $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 12
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.
Etudier les variations de f et construire sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
En déduire l'aire en cm^2 de la partie comprise entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = \sqrt{3}$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.

Solution. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. D'où le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$



Sur l'intervalle $\left[0\,,\,\sqrt{3}\right]$ la fonction f est continue et négative et a pour primitive $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$.
Une unité d'aire est égale à 4 cm^2.
L'aire de la partie en question est égale à :
$\mathscr{A} = -\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)\mathrm{d}x = -(F(\sqrt{3}) - F(0)) = 2.25$
Soit en unité d'aire $\mathscr{A} = 2.25 \times 4cm^2 = 9cm^2$ □