# 30 Suites numériques

Lorsqu'on compte des nombres réels, on obtient une liste ordonnée de nombres réels numérotés généralement par des indices, entiers naturels consécutifs 0, 1, 2 $\cdots$. Une telle liste est appelée suite numérique.
Par exemple pour traduire l'évolution du prix d'un produit, on notera $p_0$ le prix initial, $p_1$ le prix au cours du premier mois, $p_2$ le prix au cours du deuxième mois, $\cdots$ , $p_n$ le prix au cours du n$^{\text{ième}}$ mois.
L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir dès l'Antiquité d'un certain ARCHIMÈDE pour trouver une valeur approchée de $\pi$.
Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaîtra qu'au début du XIXe siècle avec le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789; 1857).
De nos jours, les suites sont devenues un outil essentiel : elles sont à la base des algorithmes qui constituent le « cerveau » des calculatrices et les ordinateurs..
Elles interviennent aussi dans beaucoup de problèmes de géographie, mathématiques financières , ....
L'objectif de ce chapitre est de rappeler les notions de base et les propriétés des suites arithmétiques et géométriques vues en classe de première.
Ensuite nous étudierons le sens de variation et la convergence de suites.

## Généralités

**Définition 1**
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels n.
On appelle **suite numérique** toute fonction $u$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

**Notation et vocabulaire**

- L'image de $n$ est $u(n)$ elle est notée $u_n$ (lire $u$ indice $n$).
  $u_n$ est appelé le terme d'indice $n$ ou le terme de rang $n$.
- La suite $u$ est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)$.
- Si les indices de la suite commencent à partir d'un entier naturel $k$ alors on dit que la suite est définie à partir du rang $k$. Dans ce cas on notera la suite par $(u_n)_{n\geq k}$.
- La suite est dite **positive** (respectivement **négative**) lorsque tous ses termes sont positifs (respectivement négatifs).

**Méthode 2** (Attention à l'écriture indicielle.)
• $(u_n)$ désigne la suite alors que $u_n$ désigne la valeur du terme de rang $n$.
• $u_{n+1}$ est le terme d'indice $n+1$
• $u_n + 1$ est la somme du terme $u_n$ d'indice $n$ et du nombre 1.
• Les indices sont rangés ainsi : $1, 2, 3, \cdots, \; n-1, \; n, \; n+1, \; n+2, \; \cdots$

# Différentes façons de définir une suite

On distingue deux façons de présenter une suite :

**Suite définie par une formule explicite**

On peut définir une suite en donnant une **formule explicite** qui permet de calculer directement à partir de $n$, le terme d'indice $n$.

Elle est du type $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction numérique.

**Exemple 3**

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_n = 2n+4$

Calculons les quatre premiers termes de la suite ainsi que $u_{10}$ .

*Réponse* : $u_0 = 4$ , $u_1 = 6$ , $u_2 = 8$ , $u_3 = 10$ et $u_{10} = 44$

**Suite définie par une relation de récurrence**

Une suite est définie par récurrence par la donnée du premier terme et la relation liant deux termes consécutifs de la suite en général du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $u_n = f(u_{n-1})$

**Exemple 4**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 4$

Calculons les quatre premiers termes de la suite ainsi que $u_{10}$ .

*Réponse* :

$u_1 = -2,\quad u_2 = 2u_1 + 4 = -4 + 4 = 0,\quad u_3 = 0 + 4 = 4\quad u_4 = 12$

Pour calculer $u_{10}$ cette fois-ci, il faut connaître la valeur de $u_9$ car $u_{10} = 2u_9 + 4$, il faut connaître $u_8$ ... ainsi de suite : pour calculer un terme il faut connaître le précédent : on dit que la suite $(u_n)$ est définie par récurrence ou qu'elle est héréditaire. On ne peut calculer directement la valeur de $u_{10}$ contrairement à l'exemple précédent.

**Exemple 5**

Pour la suite $(v_n)$ définie par : $v_0 = 3$ et $v_n = 2v_{n-1} - 5$ on a :

$v_0 = 3,\quad v_1 = 2v_0 - 5 = 6 - 5 = 1,\quad v_2 = 2 - 5 = -3\ ,\quad v_3 = -11$

L'objet de certains exercices est de transformer une suite donnée par une relation de récurrence en une suite écrite par une formule explicite pour pouvoir calculer directement la valeur d'un terme de rang donné. Pour cela on utilise une suite auxiliaire qui soit arithmétique ou géométrique (qu'on verra ultérieurement).

# I - Sens de variation d'une suite

Une suite est une fonction particulière, on retrouve donc naturellement la notion de sens de variation pour une suite.

**Définition 6**
Soit $(u_n)$ une suite, $k$ un entier naturel. On dit que :

- la suite $(u_n)$ est **croissante** à partir du rang $k$ si, pour tout entier $n \geq k$ : $u_{n+1} \geq u_n$ ;
- la suite $(u_n)$ est **décroissante** à partir du rang $k$ si, pour tout entier $n \geq k$ : $u_{n+1} \leq u_n$ ;
- la suite $(u_n)$ est **constante** à partir du rang $k$ si, pour tout entier $n \geq k$ : $u_{n+1} = u_n$.

- On dit que $(u_n)$ est **monotone** si son sens de variation ne change pas (elle reste croissante ou décroissante à partir d'un rang ).
  Étudier la monotonie d'une suite c'est donc étudier son sens de variation.

**Méthode 7**
Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $(u_n)$ est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $(u_n)$ est décroissante.
Si $u_{n+1} - u_n = 0$ alors $(u_n)$ est constante.

**Exemple 8**
Soit $(u_n)$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ càd $u_{n+1} \geq u_n$. La suite $(u_n)$ est croissante.

**Méthode 9**
Pour étudier le sens de variation d'une suite à **termes strictement positifs** , on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors $(u_n)$ est croissante.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors $(u_n)$ est décroissante.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ alors $(u_n)$ est constante.

**Exemple 10**
Soit $(u_n)$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = 2^{-n}$.
La suite $(u_n)$ est à termes strictement positifs .
On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{-n-1}}{2^{-n}} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} < 1$. La suite $(u_n)$ est donc décroissante.

**Méthode 11** (Cas d'une suite en mode explicite )
Soit $(u_n)$ une suite définie par $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors $(u_n)$ est croissante.
- Si $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ alors $(u_n)$ est décroissante.

**Exemple 12**
On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = -n^2 - 2n + 7$
$(u_n)$ est une suite de la forme $u_n = f(n)$ où $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 7$.
Or $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2x - 2$.
Ainsi si $x \geq -1$ alors $f$ est décroissante par conséquent la suite $(u_n)$ est décroissante.

## II - Suites arithmétiques

**Définition 13**
Une suite $(u_n)$ est dite **suite arithmétique** s'il existe un réel $r$ tel que pour tout entier naturel $n$ on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
$r$ est appelé **la raison** de la suite arithmétique.

**Exemple 14**
• La suite définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n + 5$ pour $n \geq 0$, est une suite arithmétique de raison 5.
• La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.

**Remarque 15**
• La raison d'une suite arithmétique est un réel indépendant de $n$.
• Dans une suite arithmétique, on passe d'un terme au terme de rang suivant en ajoutant toujours $r$.

**Méthode 16**

- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$
  ( ou $u_n - u_{n-1}$ ) est constante. Cette constante est la raison $r$.
- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut aussi exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et vérifier que $u_{n+1}$ se met sous la forme $u_{n+1} = u_n + r$.
  Ou exprimer $u_n$ en fonction de $u_{n-1}$ et vérifier que $u_n$ se met sous la forme $u_n = u_{n-1} + r$.

**Exemple 17**
Soit la suite $(u_n)$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = -6n + 1$.
Montrons que cette suite est arithmétique :
$u_{n+1} - u_n = -6(n+1) + 6n - 1 = -6n - 6 + 6n + 1 = -6$. La suite $(u_n)$ est arithmétique de raison $-6$.

### Expression du terme général en fonction de n

**Propriété 18**
Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $r$.
Alors pour tout entier naturel $n$, $u_n = u_0 + nr$.

**Exemple 19**
Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
Déterminons sa forme explicite.
D'après la propriété précédente pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 2 - 3n$.
On peut alors directement calculer n'importe quel terme à partir de son rang.
Par exemple $u_5 = 2 - 3 \times 5 = -13$.

**Propriété 20** (Cas général)
Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$.
Alors pour tous entiers naturels $p$ et $n$, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$.

**Exemple 21**
Soit la suite arithmétique ( $v_n$ ) de raison 5 et telle que $\mathrm{v}_{10} = 7$. Déterminons sa forme explicite.
Pour tout entier naturel $n$, on a :
$v_n = v_{10} + (n-10)r$ équivaut à $v_n = 7 + 5(n-10) = 5n - 43$.

### Sens de variation

**Propriété 22**
Soit $(u_n)$ une suite est arithmétique de raison $r$.

- si $r > 0$ alors la suite $(u_n)$ est strictement croissante ;
- si $r = 0$ alors la suite $(u_n)$ est strictement constante ;
- si $r < 0$ alors la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

### Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)$ une suite, $p$ et $q$ deux entiers naturels tels que $p \leq q$.
On retiendra le résultat suivant :

La somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$ comporte $q - p + 1$ termes .

**Exemple 23**
La somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ contient $10 - 0 + 1 = 11$ termes.
La somme $u_4 + u_1 + \cdots + u_{21}$ contient $21 - 4 + 1 = 18$ termes.
La somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ contient $n - 0 + 1 = n + 1$ termes.
La somme $u_1 + u_1 + \cdots + u_n$ contient $n - 1 + 1 = n$ termes.

**A retenir**

Plus généralement la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la demi somme des termes extrêmes.

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

**Exemple 24**

$(u_n)$ est la suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $u_0 = 3$.

Calculer la somme S des 30 premiers termes de cette suite.

S= $u_0 + u_1 + \cdots + u_{29} = 30 \times \dfrac{u_0 + u_{29}}{2}$.

Or $u_{29} = u_0 + 29 \times 2 = 3 + 58 = 61$.

Donc $S = 30 \times \dfrac{3+61}{2} = 960$

**Exemple 25** (Etude d'une situation modélisée par une suite arithmétique)

Chaque année depuis le 1er janvier 1997, la population d'une ville s'accroît du même nombre d'habitants. On note $u_n$ cette population $n$ années après le 1er janvier 1997.

1. Justifier que la suite $(u_n)$ est arithmétique.
2. La population s'élevait à 15 850 habitants le 1er janvier 1999 et à 23 290 habitants à la fin de l'année 2011. Calculer la raison $r$ de la suite $(u_n)$.

*Solution.*

1. L'augmentation annuelle de population est constante depuis le 1er janvier 1997, la différence $u_{n+1} - u_n$ est égale à cette augmentation, la suite est donc arithmétique.
2. Les données se traduisent par $u_2 = 15850$ et $u_{14} = 23290$.

   Or $u_{14} = u_2 + 12r$, donc $r = \dfrac{23290 - 15850}{12} = 620$

□

# III - Suites géométriques

**Définition 26**

Une suite $(u_n)$ est dite **suite géométrique** s'il existe un réel $q$ tel que pour tout entier naturel $n$ on a : $u_{n+1} = qu_n$.

$q$ est appelé **la raison** de la suite géométrique.

**Exemple 27**

• La suite définie par $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = -3u_n$ est la suite géométrique de premier terme $0,5$ et de raison $-3$.

• La suite des puissances entières de 3 $(1;3;9;27;81...etc)$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3 .

**Remarque 28**
La raison d'une suite géométrique est un réel indépendant de $n$.
Dans une suite géométrique, on passe d'un terme au terme de rang suivant en multipliant toujours par $q$.

**Méthode 29**
- Pour montrer qu'une suite de termes non nuls est géométrique, on peut montrer que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (ou $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ ) est constant.
- Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et vérifier que $u_{n+1}$ se met sous la forme $u_{n+1} = qu_n$.
  Ou exprimer $u_n$ en fonction de $u_{n-1}$ et vérifier que $u_n$ se met sous la forme $u_n = qu_{n-1}$.

**Exemple 30**
Soit la suite $(u_n)$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ , par $u_n = \dfrac{3}{5^n}$. Montrons que cette suite est géométrique .
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{3}{5^{n+1}}}{\frac{3}{5^n}} = \dfrac{5^n}{5^{n+1}} = \dfrac{1}{5}$. La suite $(u_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

**Expression du terme général en fonction de n**

**Propriété 31**
Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q \neq 0$.
Alors pour tout entier naturel $n$, $u_n = u_0 q^n$.

**Exemple 32**
Soit $(u_n)$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $q = 2$, donc pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ , $u_n = u_0 q^n = -1 \times 2^n$.
On peut alors directement calculer n'importe quel terme à partir de son rang.
Par exemple $u_5 = -1 \times 2^5 = -32$.

**Propriété 33** (Cas général.)
Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$.
Alors pour tous entiers naturels $p$ et $n$ , $u_n = u_p q^{n-p}$.

**Exemple 34**
Soit la suite géométrique $(u_n)$ telle que $u_4 = 21$ et de raison 3. Déterminons sa forme explicite.

$u_n = u_4 q^{n-4} = 2 \times 3^{n-4}$

**Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique**

**Propriété 35**
La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ est :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**Exemple 36**
Soit $(u_n)$ la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.
On a : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{64} = 1 \times \frac{1-2^{65}}{1-2} = 2^{65} - 1.$

**A retenir**
Plus généralement la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique peut-être retenue comme suit :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

**Exemple 37**
Soit $(u_n)$ la suite est géométrique de premier terme $u_4 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
On se propose de calculer la somme $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{14}$.
Elle comporte $14 - 4 + 1 = 11$ termes .
On a :

$$S = u_4 \frac{1-q^{11}}{1-q} = u_4 \frac{1-(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 4\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right] = 3.998$$

**Exemple 38** ( Etude d'une situation modélisée par une suite géométrique)
Une personne place dans une banque une somme de 100 000F le 1er janvier 2010.
Cette somme augmente de 5% à la fin de chaque année.
On note par $u_0$ la somme initialement déposée et $u_n$ la somme obtenue au bout de l'année $2010 + n$ où $n$ désigne un entier naturel.

1. Calculer les sommes $u_1$ et $u_2$ obtenues en 2011 et en 2012.
2. Conjecturer une expression de $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ pour un entier $n$ donné. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?
3. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
4. Calculer la somme obtenue en 2020.

*Solution.* 1. On a $u_0 = 100000$.

$u_1 = \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times u_0 = 1.05 \times u_0 = 1.05 \times 100000 = 105000.$
$u_2 = \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times u_1 = 1.05 \times u_1 = 1.05 \times 105000 = 110250.$

2. D'après les réponses précédentes, on peut conjecturer que : $u_{n+1} = 1.05 u_n$ pour tout entier naturel $n$.
   Ainsi la suite des sommes obtenues $(u_n)$ est géométrique de raison $q = 1.05$ et de premier terme $u_0 = 100000$.
3. On a $u_n = u_0 \times q^n = 100000 \times 1.05^n$, pour tout entier naturel $n$.
4. En 2020 on a : $u_{10} = 100000 \times 1.05^{10} = 162889.463$

□

## IV - Convergence d'une suite

**Définition 39**
Une suite $(u_n)$ est dite **convergente** si elle admet une limite finie $l$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
On dit que la suite $(u_n)$ converge vers $l$ et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.
Dans le cas contraire, la suite est dite divergente.

**Exemple 40**
Soit $u_n = 5 + \frac{1}{n}$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$ donc la suite $(u_n)$ converge vers 5.

**Remarque 41**
Dire qu'une suite est divergente signifie qu'elle n'a pas de limite, par exemple $u_n = (-1)^n$ ou que sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$ par exemple $u_n = 3n + 2$

**Cas d'une suite géométrique**

**Propriété 42**
Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$.

- si $q \in ]-1\,,\,1[$ alors la suite $(u_n)$ est convergente et converge vers 0.
- si $q < -1$, alors $u_n$ n'a pas de limite, alors la suite $(u_n)$ est divergente.
- si $q > 1$ alors la suite $(u_n)$ est divergente.

**Conséquence 43**
- Si $q \in ]-1\,,\,1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

**Exemple 44**
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.3^n = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\dfrac{4}{7}\right)^n = 1$.

# V - Raisonnement par récurrence

**Méthode 45**
Pour démontrer une propriété dépendant d'un entier naturel (comme très souvent avec les suites), on fait une **démonstration par récurrence**.
Le principe est très simple, :

1. On démontre d'abord la propriété au rang initial (en général pour $u_0$ ou $u_1$), c'est l'**initialisation**.
2. Puis on suppose la propriété vraie à un certain rang $k$ quelconque puis on démontre que la propriété est vraie au rang $k+1$ (en utilisant la propriété définissant la suite), c'est l'**hérédité**.
3. Enfin, on conclut que la propriété est vraie pour tout entier naturel $n$, c'est la **conclusion**.

**Exemple 46**
Une somme vaut initialement $u_0 = 100$. Cette somme augmente de 4% chaque mois. On note $u_n$ la somme générée au n-ième mois Démontrer que $u_n = 1.04^n \times 100$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

1. **Initialisation** : pour $n = 0$, $\quad u_0 = 1.04^0 \times 100 = 100$.
   La propriété est donc vraie au rang 1.
2. **Hérédité** : on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel $k$ quelconque.
   On suppose donc que : $\; u_k = 1.04^k \times 100$. Il faut maintenant calculer $u_{k+1}$.
   Par définition : $u_{k+1} = \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) u_k = 1.04 u_k = 1.04 \times \underbrace{1.04^k \times 100}_{u_k = 1.04^k \times 100} = 1.04^{k+1} \times 100$.
3. Comme nous avons démarré avec $n = 0$, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.