28 Probabilité

Prévoir et calculer des résultats dus aux hasard, tel est le but et l'ambition du calcul des probabilités.
Les origines de ce calcul viennent du $17^{\text{ième}}$ siècle, lorsque le chevalier de Méré, passionné de jeux , pariait qu'avec un dé il sortirait au moins un «six» en 4 coups.
Quand il prétendit sortir au moins un « double six » en 24 coups, il perdit de l'argent et s'en ouvrit à son ami Pascal.
C'est en cherchant une explication à ce genre de problème que Pascal devient avec Fermat, le fondateur des probabilités.
Mais c'est au début du $18^{\text{ième}}$ siècle que Bernoulli écrit le premier véritable ouvrage de probabilités.
De Moivre poursuit les études sur les permutations et combinaisons et résolut des problèmes de dés et d'urnes.
De nos jours, le calcul des probabilités est très utilisé dans divers domaines : sondages, assurances, météorologie,, biologie, physique...
L' objectif de ce chapitre est de rappeler le vocabulaire de la théorie et donner quelques exemples types Bac de calcul de probabilités.

I - Vocabulaire de la probabilité

Expérience aléatoire

Le calcul des probabilités s'appuie sur les expériences aléatoires.

Définition 1
Une expérience est dite aléatoire si :

— on ne peut prédire le résultat avec certitude,

— on peut décrire l'ensemble des résultats possibles.

Exemple 2
1. Jeter un dé et regarder le numéro apparu.
2. Lancer d'une pièce de monnaie et s'intéresser à la face apparue.
3. Le choix d'une ou de plusieurs boules d'une urne contenant par exemple 12 boules.

Notion d'événement

Définition 3
- Tout résultat d'une expérience aléatoire est appelé une **éventualité**.
- L'ensemble des éventualités est appelé **univers des possibles** ou **univers** ; il est noté en général Ω.
- Toute partie de Ω est appelée **événement**.
- Un événement est dit **réalisé** si le résultat de l'expérience aléatoire appartient à cet

événement.

- Deux événements A et B sont **incompatibles**, si A $\cap$B = $\emptyset$.
  En d'autres termes, il n'existe aucun résultat qui les réalise à la fois.

Exemple 4 1. Dans le jet du dé, l'univers des possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les éventualités sont les six valeurs : $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
La partie $A = \{2, 4, 6\}$ est un événement de cette expérience aléatoire; on peut la décrire par : A : « obtenir un nombre pair »
Lors du jet du dé, s'il sort le 2 alors l'événement « obtenir un nombre pair» est réalisé.

2. Pour le lancer de la pièce de monnaie, l'univers des possibles est $\Omega = \{P, F\}$.
3. Tirage d'une boule parmi 12 boules : Ω est l'ensemble des 12 boules.

Événements particuliers

Définition 5 • Ω est appelé l'**événement certain.** Il est toujours réalisé.

- L'ensemble vide $\emptyset$ est appelé l'**événement impossible**. Il n'est jamais réalisé.
- Un événement qui ne contient qu'un seul élément est appelé un **événement élémentaire**.
- L'**événement contraire** de l'événement A, est le complémentaire de A dans Ω. Il est noté : $\overline{A}$.
  En d'autres termes, si A est réalisé alors son contraire $\overline{A}$ ne l'est pas et vice versa.
  ▶ On considère une expérience d'univers Ω et deux événements A et B liés à elle.
  La réunion et l'intersection de ces deux événements sont des événements.
- L' **événement « A ou B »**, est l'ensemble A $\cup$B.
  A $\cup$B est réalisé si l'un au moins des deux événements est réalisé.
- L' **événement « A et B »,** est l'ensemble A$\cap$ B.
  A $\cap$B est réalisé si les deux événements sont réalisés simultanément.

Remarque 6
Si deux événements sont contraires alors ils sont incompatibles. Mais la réciproque est fausse. Lors du jet du dé, les événements $A = \{1, 4\}$ et $B = \{5, 6\}$ sont incompatibles car $A \cap$B = $\emptyset$ mais ils ne sont pas contraires.

Exemples d'événements particuliers.

Dans le lancer du dé, considérons les deux événements suivants :

A : « obtenir un nombre pair»

B : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 3»

On écrit alors $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$

— $A \cap B$ est l'événement:«obtenir un nombre pair supérieur ou égal à 3» donc $A \cap B = \{4, 6\}$.

— $A \cup B$ est l'événement:«obtenir un nombre pair ou un nombre supérieur ou égal à 3» donc $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

— L'événement C : « le six apparaît » est élémentaire; tandis que l'événement D : « un nombre supérieur à 7 apparaît » est impossible et l'événement E : « un nombre inférieur ou égal à 7 apparaît » est certain.

— L'événement contraire de l'événement A est $\overline{A}$:« obtenir un nombre impair»; il est composé des éventualités suivantes : 1, 3 et 5. Soit $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.

Exercice 7

Dans chacune de situations décrites ci-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné.

1. Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard. A : « Les deux élèves sont des filles ».
2. Dans un groupe de sérères et de wolof, on discute avec une personne. B : « La personne est un homme wolof ».
3. Au restaurant, Awa prend un plat et un dessert. C : « Awa prend une viande et une glace ».
4. A une loterie, Adama achète 3 billets. D : « L'un des billets au moins est gagnant » , E : « Deux billets au maximum sont gagnants».

II - Probabilité d'un événement

Approche expérimentale de la probabilité

On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée qu'on lance plusieurs fois et à observer la fréquence d'apparition du côté pile. Si le jeu est répété un grand nombre de fois, on constate expérimentalement que cette fréquence est proche de $\frac{1}{2}$. On convient de prendre $\frac{1}{2}$ comme probabilité de l'événement : « obtenir pile».

Pour les mêmes raisons, on prend $\frac{1}{2}$ comme probabilité de l'événement : « obtenir face».

De même, si on lance un grand nombre de fois un dé à six faces parfaitement équilibré, la fréquence d'apparition de chaque face est sensiblement égale à $\frac{1}{6}$.

D'une manière générale nous admettons le résultat suivant : **les fréquences obtenues d'un événement E se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expériences augmente. Cette valeur s'appelle la probabilité de l'événement E.**

Définition 8
Soit une expérience aléatoire d'univers Ω.
A chaque événement A, on fait correspondre un nombre réel appelé probabilité de A, noté P(A) et vérifiant :

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles.

Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ alors $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'événement A.

Propriété 9
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Si A et B sont des événements quelconques, alors :
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Remarque 10
- $P(A)$ est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui réalisent A.
- La somme des probabilités des événements élémentaires de Ω est égale à 1

Exemple 11
On lance un dé cubique **pipé** dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Ce dé est tel que les événements élémentaires $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$ ont la même probabilité égale à $\frac{2}{9}$.
Tandis que les événements élémentaires $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$ ont pour probabilité $\frac{1}{9}$.
Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ?

Solution. L'univers Ω de cette expérience aléatoire est défini par : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Le dé n'étant pas parfaitement équilibré, les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.
On a :
• $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \dfrac{2}{9}$

Et $P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \dfrac{1}{9}$

• Désignons par A l'événement « le numéro de la face supérieure est un chiffre pair »
A est réalisé par l'un des résultats 2; 4 ou 6 donc A= $\{2, 4, 6\}$

Ainsi P(A)= $P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{9}$. □

Cas où les événements élémentaires sont équiprobables

Définition 12
Lorsque les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont **équiprobables**.

Propriété 13
Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement quelconque A est donnée par :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}}$$

Exercice 14
Dans une urne se trouvent huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 et trois noires N_1, N_2 N_3 . On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, on ne la remet pas dans l'urne puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.
Calculer les probabilités de chacun des événements suivants :
– A : « les deux boules tirées sont de la même couleur».
– B : «les deux boules tirées sont de couleur différente » .

Solution. L'expérience a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires. Car les boules sont indiscernables au toucher et on les tire au hasard.
Une éventualité est un ensemble ordonné de deux boules prises dans l'ensemble des huit boules. Désignons par Ω l'univers des éventualités. C'est-à-dire le nombre de tirages possibles (cf :*Cours Dénombrement*)

On a card $\Omega = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$

• Probabilité de A.

A est constitué des 2- arrangements de $\{R_1; R_2; R_3; R_4\}$ ou des 2- arrangements de $\{N_1; N_2; N_3\}$

D'où cardA= $A_4^2 + A_3^2 = 26$

donc P(A)= $\frac{26}{56} = \frac{13}{28}$

• Probabilité de B.

L'événement B est le contraire de A.

Donc P(B)= 1− P(A)= $1 - \frac{13}{28} = \frac{15}{28}$ □

Exercice 15

Un sac contient quatre jetons verts numérotés de 1 à 4 et trois jetons rouges numérotés de 5 à 7.

On suppose que la probabilité de tirer un jeton vert est 0.175 et celle de tirer un jeton rouge est 0.1.

On tire au hasard un jeton du sac. Calculer la probabilité des événement suivants.

1. E : « Le jeton tiré porte un numéro impair».
2. F : « Le jeton tiré est rouge».
3. En déduire $P(E \cup F)$.