25 Fonction logarithme népérien (TL)

Avant l'invention des calculateurs (ordinateurs, calculatrices, ...) les mathématiciens ont cherché à simplifier les calculs à effectuer.

1) Durant l'Antiquité (IIIème siècle avant J.C.), Archimède avait remarqué que pour multiplier certains nombres, il suffisait de savoir additionner ! et qu'il était plus facile d'effectuer des additions plutôt que des multiplications !

2) John Napier (ou Neper), baron écossais (1550-1617), a repris et étendu l'idée d'Archimède et a mis au point une méthode générale qui permet d'effectuer
-des additions à la place de multiplications
-des soustractions à la place de divisions ;
ce sont les **logarithmes.**

3) Modéliser la forme d'un cyclone, d'un coquillage ou d'une fleur de tournesol, mais aussi représenter sur un même graphique les distances des planètes en fonction de leurs périodes de révolution , sont autant d'activités qui utilisent une même famille de fonctions : les logarithmes.

I - Définition et propriétés

Définition 1. On appelle fonction logarithme népérien, notée ln , la fonction dérivable sur $]0\,,\,+\infty[$ qui a pour fonction dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et qui s'annule pour $x = 1$.

Exemple 2 (calcul à l'aide de la calculatrice)**.**

x	-3	-1	0	0.2	0.5	1	2	8	50	100
$\ln x$	$\times$	$\times$	$\times$	$-1,609$	$-0,693$	0	$0,693$	$2,079$	$3,912$	$4,605$

Conséquence 3.

1. Le domaine de définition de la fonction ln est $]0\,,\,+\infty[$.
2. La fonction ln est dérivable sur $]0\,,\,+\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a $\boxed{\ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$.
3. $\boxed{\ln(1) = 0}$.
4. La dérivée de la fonction ln étant strictement positive sur $]0\,,\,+\infty[$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,,\,+\infty[$.

Propriété 4.

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$,
$$a < b \iff \ln a < \ln b$$
$$a > b \iff \ln a > \ln b$$
$$a = b \iff \ln a = \ln b$$

Propriété 5 (Propriété fondamentale)**.**

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$, on a $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Conséquence 6 (propriétés algébriques)**.** Soient $a > 0$ et $b > 0$.

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$
- $\ln a^n = n \ln a$ pour tout $n \in \mathbb{Q}$

II - Étude de la fonction ln

Propriété 7 (Limites)**.** • $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Tableau de variation

Des propriétés précédentes, on en déduit le tableau de variation suivant.

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Conséquence 8. La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0\,,\,+\infty[$ cela entraîne que c'est une bijection de $]0\,,\,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
Donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in]0\,,\,+\infty[$ tel que $\ln x = y$.
En particulier il existe un unique réel noté e tel que : $\boxed{\ln \mathrm{e} = 1}$.

On démontre que $\mathrm{e} \simeq 2,718$, il est appelé la **constante d' Euler**.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{Q}$, $\ln \mathrm{e}^n = n \ln \mathrm{e} = n$

Ainsi :

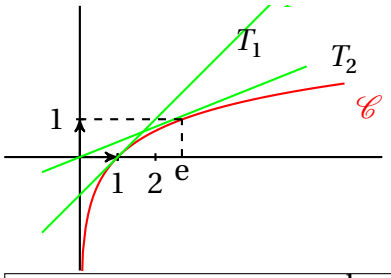
$\ln x = n \iff x = \mathrm{e}^n$	$\ln x > n \iff x > \mathrm{e}^n$	$\ln x < n \iff x < \mathrm{e}^n$

Représentation graphique de la fonction ln

On construit les tangentes T_1 et T_2 à la courbe de ln respectives aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = e$.

$T_1 : y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$ soit $T_1 : y = x - 1$

$T_2 : y = \ln'(e)(x-e) + \ln e$ soit $T_2 : y = \frac{1}{e}x$



$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Equations, inéquations et systèmes

Equations comportant ln

methode

Pour résoudre une équation comportant des logarithmes,

- on détermine le domaine D de résolution ;
- on transforme si possible l'équation sous la forme $\ln A = \ln B$;
- résout l'équation $A = B$;
- puis on retient que les solutions appartenant à D.

Exemple 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(2x-3) - \ln x = 0$

L'équation est définie lorsque $2x - 3 > 0$ et $x > 0$ c'est-à-dire $x > \frac{3}{2}$. Ainsi D= $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

L'équation devient $\ln(2x-3) = \ln x$ ce qui équivaut à $2x - 3 = x$ soit $x = 3$ qui est bien dans D. Donc S= {3}

Exemple 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(x+5) + \ln(x+3) = \ln 15$

L'équation est définie lorsque $x + 5 > 0$ et $x + 2 > 0$ c'est-à-dire $x > -5$ et $x > -3$.

Ainsi D= $]-3, +\infty[$.

L'équation devient $\ln(x+5)(x+3) = \ln 15$

Ce qui équivaut à $(x+5)(x+3) = 15$ soit $x^2 + 8x + 15 = 0$ ou encore $x^2 + 8x = 0$ soit $x = 0$ ou $x = -8$ Donc S= {0}

Equations du type $a\ln^2 x + b\ln x + c = 0$

Poser $\ln x = X$ puis résoudre l'équation E du second degré $aX^2 + bX + c = 0$ et enfin les équations $\ln x = X_1$ et $\ln x = X_2$ où X_1 et X_2 sont les solutions de E.

Exemple 11. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\ln x)^2 - 6\ln x + 5 = 0$.
Pour $x > 0$, posons $\ln x = X$, l'équation devient $X^2 - 6X + 5 = 0$ d'où $X = 1$ ou $X = 5$.
Ainsi $\ln x = 1 \iff x = \text{e}$ ou $\ln x = 5 \iff x = \text{e}^5$ d'où S= $\{\text{e}, \text{e}^5\}$

Inéquation comportant ln
methode
Pour résoudre une inéquation comportant des logarithmes,

- on détermine le domaine D de résolution ;
- on transforme si possible l'inéquation sous la forme $\ln A < \ln B$ ou $\ln A \geq \ln B$;
- résout l'inéquation $A < B$ ou $A \geq B$;
- puis on retient que les solutions appartenant à D.

Exemple 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(2x-3) - \ln x < 0$.
L'inéquation est définie lorsque $2x - 3 > 0$ et $x > 0$ c'est-à-dire $x > \frac{3}{2}$. Ainsi D= $\left]\frac{3}{2}\,,\, +\infty\right[$.
L'inéquation devient $\ln(2x-3) < \ln x$ ce qui équivaut à $2x - 3 < x$ soit $x < 3$ qui est bien dans D. Donc S= $\left]\frac{3}{2}\,,\, +\infty\right[\cap]-\infty\,,\, 3[= \left]\frac{3}{2}\,,\, 3\right[$

Exemple 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln(x+5) + \ln(x+3) \leq \ln 15$
L'inéquation est définie lorsque $x + 5 > 0$ et $x + 2 > 0$ c'est-à-dire $x > -5$ et $x > -3$.
Ainsi D= $]-3\,,\, +\infty[$.
L'inéquation devient $\ln(x+5)(x+3) \leq \ln 15$
Ce qui équivaut à $(x+5)(x+3) \leq 15$ soit $x^2 + 8x + 15 \leq 0$ ou encore $x^2 + 8x \leq 0$.

x	$-\infty < x < -8$	$x = -8$	$-8 < x < 0$	$x > 0$
$x^2 + 8x$	+	0	−	+

Donc S= $]-3\,,\, +\infty[\cap [-8\,,\, 0] =]-3\,,\, 0]$

Systèmes d'équations comportant ln

Exemple 14. Résolvons le système suivant.

$$\begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = 2 \\ 5\ln x - \ln y = 22 \end{cases}$$

Le système est défini pour $x > 0$ et $y > 0$.

En posant $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, le système devient : $\begin{cases} 2X + 3Y = 2 \\ 5X - Y = 22 \end{cases}$

En utilisant la méthode d'addition par exemple, on trouve $X = 4$ et $Y = -2$.

Puis $\ln x = 4 \iff x = \text{e}^4$ et $\ln y = -2 \iff y = \text{e}^{-2}$

D'où S= $\{(\text{e}^4, \text{e}^{-2}), (\text{e}^{-2}, \text{e}^4)\}$

Exemple 15. Résolvons le système suivant.

$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 12 \\ \ln(x+y) = \ln 2 + \ln 4 \end{cases}$

Le système est défini pour $x > 0$ et $y > 0$.

On peut réécrire le système sous la forme :

$\begin{cases} \ln xy = \ln 12 \\ \ln(x+y) = \ln 8 \end{cases}$ soit $\begin{cases} xy = 12 \\ x+y = 8 \end{cases}$

Ainsi les réels x et y vérifient l'équation du second degré $X^2 - 8X + 12 = 0$

On trouve $X_1 = 2$ et $X_2 = 6$ d'où S= $\{(2,6),(6,2)\}$

III - Etude des fonctions faisant intervenir ln

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.
On considère la fonction f définie pour tout $x \in I$ par : $f(x) = \ln(u(x))$.

Domaine de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $u(x) > 0$

Exemple 16. $f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$ existe si et seulement si $x^2 - 1 > 0$ c'est-à-dire $x < -1$ ou $x > 1$

$Df =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Remarque 17. • Attention le domaine de définition de $\ln u$ n'est pas forcément celui de la fonction $\ln x$ de la définition initiale.
• $f(x) = \ln|u(x)|$ existe si et seulement si $u(x) \neq 0$

Exemple 18. $f(x) = \ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|$ existe si et seulement si $\dfrac{x-3}{x-2} \neq 0$ si et seulement si $x \neq 3$ et $x \neq 2$ c'est-à-dire $x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$. Ainsi $Df =]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$

Propriété 19 (Limites).
- Si u tend vers L alors $\ln u$ tend vers $\ln L$.
- Si u tend vers $+\infty$ alors $\ln u$ tend vers $+\infty$.
- Si u tend vers 0^+ alors $\ln u$ tend vers $-\infty$.

Exemple 20.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{x-8} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+3}{x-8}\right) = \ln 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{x-8} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{x+3}{x-8}\right) = \ln 1 = 0$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(x^2-1\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-1=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln\left(x^2-1\right)=-\infty$

Dérivée

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème 21.
- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et on a : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
- Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I alors la fonction $\ln|u|$ est dérivable sur I et on a : $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$

Exemple 22.
- La fonction $x \longmapsto 2x-1$ est dérivable et strictement positive sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ donc la fonction $x \longmapsto \ln(2x-1)$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et pour tout $x>\frac{1}{2}$, on a : $\ln'(2x-1)=\dfrac{2}{2x-1}$.
- Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left(x^2+3x-4\right)$
  $\ln\left(x^2+3x-4\right)$ existe si et seulement si $x^2+3x-4>0$.
  On recherche les racines de $u(x)=x^2+3x-4$.
  $\Delta = 3^2-4\times 1\times(-4)=25=5^2$. Le trinôme a deux racines : $x_1=\dfrac{-3-5}{2}=-4$ et $x_2=\dfrac{-3+5}{2}=1$.
  $u(x)$ est du signe de $a=1$, soit positif sauf entre les racines.
  Donc f est bien définie sur $]-\infty\,;-4[\cup]1\,;+\infty[$.
  u est dérivable (car polynôme) et strictement positive sur $]-\infty\,;-4[\cup]1\,;+\infty[$.
  Donc $f'(x)=\ln'\left(x^2+3x-4\right)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}$