

21 Factorisation des polynômes.

I - Rappels sur le trinôme du second degré

Equations du second degré

Définition 1. On appelle équation du second degré toute équation pouvant se ramener sous la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Nous rappelons la méthode de résolution vue en classe de seconde.

Soit l'équation (E) suivante : $ax^2 + bx + c = 0$.

On utilise le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'a pas de solutions et $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.
2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) a une seule solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
3. Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) a deux solutions (ou racines) distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Remarque 2. Si l'équation du second degré est incomplète du type $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 + c = 0$ alors il est inutile de calculer Δ : on peut faire une factorisation pour trouver les racines.

Exemple 3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes puis factoriser le trinôme figurant au 1^{er} membre.

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|--------------------|
| 1. $3x^2 - 2x - 16 = 0$ | 3. $-4x^2 + 20x - 25 = 0$ | 5. $7x^2 + 3x = 0$ |
| 2. $-5x^2 + x - 1 = 0$ | 4. $2x^2 + 3x - 1 = 0$ | |

1. $3x^2 - 2x - 16 = 0$

On a : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3(-16) = 4 - 4(-48) = 4 + 192 = 196$.

Donc $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 14$.

$x_1 = \frac{2-14}{6} = \frac{-12}{6} = -2$ et $x_2 = \frac{2+14}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ ainsi : $S = \left\{-2, \frac{8}{3}\right\}$

Factorisation : $3x^2 - 2x - 16 = 3\left(x - \frac{8}{3}\right)(x + 2) = (3x - 8)(x + 2)$

2. $-5x^2 + x - 1 = 0$

On a : $\Delta = (1)^2 - 4 \times (-5)(-1) = 1 - 20 = -19$

Donc $\Delta < 0$ ainsi $S = \emptyset$ et on ne peut pas factoriser $-5x^2 + x - 1$

3. $-4x^2 + 20x - 25 = 0$

On a : $\Delta = (20)^2 - 4 \times (-4)(-25) = 400 - 400 = 0$

Donc $\Delta = 0$: il y a une seule solution $x_0 = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2}$ ainsi $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

Factorisation : $-4x^2 + 20x - 25 = -4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$

4. $7x^2 + 3x = 0$.

Ici, il est inutile de calculer Δ .

On a : $7x^2 + 3x = x(7x + 3) = 0$

Donc $x = 0$ ou $7x + 3 = 0$ (produit de facteurs nul)

soit $x = 0$ ou $x = -\frac{3}{7}$ et $S = \left\{0, -\frac{3}{7}\right\}$

Factorisation : déjà faite $7x^2 + 3x = x(7x + 3)$.

Somme et produit des racines

Propriété 4. — Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines distinctes ou confondues (c'est-à-dire $\Delta \geq 0$), alors leur somme : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et leur produit : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

— Réciproquement, si deux nombres ont pour somme S et pour produit P , alors ils sont les solutions de l'équation du second degré : $X^2 - SX + P = 0$ ou du système $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$.

Exemple 5. Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$.

On a : $S = 5$ et $P = 6$

Résoudre un tel système, revient à résoudre l'équation $X^2 - 5X + 6 = 0$.

On trouve $\Delta = 25 - 24 = 1$ et $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. (faire les calculs).

Les solutions du système sont les couples $(2, 3)$ et $(3, 2)$.

Equations bicarrées

Définition 6. On appelle équation bicarrée, toute équation (E) pouvant se ramener sous la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Pour résoudre une telle équation, on procède par un changement d'inconnue en posant $X = x^2$ qui mène à l'équation du second degré (E') : $aX^2 + bX + c = 0$, ensuite on résout si possible les équations d'inconnue x suivantes ; $x^2 = X_1$ et $x^2 = X_2$ où X_1 et X_2 sont les solutions possibles (E').

Exemple 7. Soit à résoudre l'équation : $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

En posant $X = x^2$, l'équation devient $X^2 - 4X + 3 = 0$.

Après calcul, on trouve comme solutions : $X_1 = 1$ et $X_2 = 3$.

On a $x^2 = 1$ soit $x = 1$ ou $x = -1$

On a $x^2 = 3$ soit $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

D'où $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -1, 1\}$

Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

Propriété 8. Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

- Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$ et s'annule en $-\frac{b}{2a}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
		$-\frac{b}{2a}$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0
		signe de a

- Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est :
 - du signe de a quand $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ (on suppose $x_1 < x_2$);
 - du signe opposé de a quand $x \in]x_1; x_2[$;
 - s'annule en x_1 et en x_2 .

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

Exemple 9. Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $4x^2 - x + 2 \leq 0$

2. $-x^2 + x + 2 > 0$

3. $x^2 - \sqrt{28}x + 7 > 0$

1. $4x^2 - x + 2 \leq 0$ On a : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 1 - 32 = -31$

x	$-\infty$	$+\infty$
$4x^2 - x + 2$	+	

$S = \emptyset$

2. $-x^2 + x + 2 > 0$ On a : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$

On trouve $x_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-x^2+x+2$	-	0	+ 0	-

$$S =]-1, 2[$$

$$3. x^2 - \sqrt{28}x + 7 > 0 \quad \text{On a : } \Delta = (-\sqrt{28})^2 - 4 \times 1 \times 7 = 28 - 28 = 0$$

$$\text{Donc } x_0 = \frac{\sqrt{28}}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$$

x	$-\infty$	$\sqrt{7}$	$+\infty$
$x^2 - \sqrt{28}x + 7$	+	0	+

$$S =]-\infty, \sqrt{7}[\cup]\sqrt{7}, +\infty[$$

II - Factorisation d'un polynôme

Définition 10. Dire que le réel α est une **racine** ou un **zéro** d'un polynôme $P(x)$, signifie que : $P(\alpha) = 0$.

Remarque 11. Déterminer les racines d'un polynôme $P(x)$, c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème 12. Soit $P(x)$ un polynôme et α un réel.

α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(x)$ est factorisable par $(x - \alpha)$.

Dans ce cas il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

$Q(x)$ est le quotient de $P(x)$ par $(x - \alpha)$ et $d^\circ Q = d^\circ P - 1$.

Remarque 13. Si α et β sont deux racines de $P(x)$ alors $P(x)$ est factorisable par $(x - \alpha)(x - \beta)$ et dans ce cas il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x)$ et $d^\circ Q = d^\circ P - 2$.

Exemple 14. Considérons le polynôme suivant : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$

Montrons que $P(x)$ est factorisable par $(x - 3)$.

Ensuite déterminons le polynôme quotient $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 3)Q(x)$ puis factorisons $P(x)$.

— On a $P(3) = 2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 - 6 \times 3 + 9 = 54 - 45 - 18 + 9 = 9 - 9 = 0$

Donc 3 est une racine de $P(x)$ c'est-à-dire que $P(x)$ est factorisable par $(x - 3)$.

D'après le théorème précédent, il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - 3)Q(x)$.

— Or $P(x)$ est de degré trois donc $Q(x)$ sera de degré deux. Par conséquent nous devons déterminer trois réels a , b et c tels que $P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$

Nous proposons ici la méthode Hörner¹ pour déterminer de $Q(x)$.

► Méthode de Hörner

On utilise la disposition suivante appelée méthode de Hörner :

	2	-5	-6	9
3	⊗	6	3	-9
	2	1	-3	0

Les valeurs 2, 1 et -3 figurant dans la dernière ligne, correspondent respectivement à celles des coefficients a , b et c de $Q(x)$. Soit $Q(x) = 2x^2 + x - 3$.

$P(\alpha)$ correspond à la valeur 0 figurant dans la dernière case de la dernière ligne du tableau de Hörner. Cette valeur n'est pas nécessairement nulle.

Ce tableau permet donc de calculer $P(\alpha)$ et de trouver en même temps les coefficients du polynôme $Q(x)$.

Factorisation de $P(x)$

Maintenant factorisons au mieux $P(x)$.

On a : $P(x) = (x - 3)(2x^2 + x - 3)$ (attention ceci n'est pas la factorisation demandée!)

On va continuer la factorisation **si possible** dans $2x^2 + x - 3$.

$$\Delta = 1 - 4 \times 2(-3) = 25 \text{ et } x_1 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1.$$

Donc $2x^2 + x - 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1) = (2x + 3)(x - 1)$. (attention ceci n'est pas la factorisation demandée!)

On remplace $(2x^2 + x - 3)$ par $(2x + 3)(x - 1)$ dans $P(x)$.

Finalement $P(x) = (x - 3)(2x + 3)(x - 1)$ cette expression est la factorisation de $P(x)$.

Remarque 15. Dans la démarche précédente, on a trouvé toutes les racines du polynôme $P(x)$. C'est-à-dire : 3 , $-\frac{3}{2}$ et 1 .

On pourrait aussi vous demander d'étudier le signe $P(x)$ à l'aide d'un tableau de signes puis de résoudre une inéquation comme nous le verrons dans les exercices.

Remarque 16. On pourrait aussi utiliser les méthodes vues en classe de première : la division ou l'identification des coefficients.

1. William George Hörner mathématicien allemand(1819-1845)