

15 Similitudes directes

Définition 1. Une transformation du plan complexe $\mathcal{P}$ est une application

$$\begin{array}{ccc} f: \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \quad \text{qui est bijective.}$$

A toute transformation f du plan complexe, on peut associer une unique application

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z' \end{array}$$

telle que si $M'(z') = f(M(z))$, alors $\varphi(z) = z'$.

φ , qui est également bijective, est appelée transformation complexe associée à f .

La formule $z' = \varphi(z)$ est appelée écriture ou expression complexe de la transformation f .

Exemple 2. — La translation, l'homothétie et la rotation sont des transformations du plan.

— La composée de deux transformations du plan est une transformation du plan.

Voici les écritures complexes de ces transformations du plan.

Écriture complexe d'une translation

Théorème 3. La translation de vecteur $\vec{u}$, d'afixe a , transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que : $z' = z + a$.

Démonstration

Dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à dire que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, ce qui se traduit en termes d'affixes par $z' - z = a$ soit $z' = z + a$.

Remarque 4. — La translation réciproque a pour vecteur $-\vec{u}$.

— Ajouter un nombre a revient géométriquement à translater d'un vecteur d'afixe a .

Écriture complexe d'une homothétie

Théorème 5. L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que : $z' - \omega = k(z - \omega)$.

Démonstration

Dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k , signifie par définition que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, ce qui se traduit en termes d'affixes par : $z' - \omega = k(z - \omega)$ ou $z' = kz + \omega(1 - k)$.

Exemple 6. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$ du plan associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = -\frac{5}{2}z + 2i$.

Montrons d'abord que f admet un unique point invariant.

Pour cela, résolvons l'équation $f(\omega) = \omega$.

$$f(\omega) = \omega \iff -\frac{5}{2}\omega + 2i = \omega \iff \omega = \frac{4}{7}i.$$

La transformation f admet donc un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{4}{7}i$.

Pour déterminer la nature de f , exprimons $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$. On a :

$$\begin{cases} z' &= -\frac{5}{2}z + 2i \\ \omega &= -\frac{5}{2}\omega + 2i \end{cases}$$

D'où en soustrayant membre à membre : $z' - \omega = -\frac{5}{2}(z - \omega)$.

On en déduit, grâce à son écriture complexe, que f est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = -\frac{5}{2}$.

Remarque 7. — Comme cas particulier d'une homothétie, on a la symétrie centrale, qui est une homothétie de rapport -1 .

L'écriture complexe de la symétrie s de centre Ω d'affixe ω est $s(z) = z' = -z + 2\omega$.

— Lorsque O (origine du repère) est le centre de l'homothétie alors $z' = kz$.

Écriture complexe d'une rotation

Théorème 8. La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ou $z' = e^{i\theta}z + \omega(1 - e^{i\theta})$.

Démonstration

Si $M = \Omega$, la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est triviale.

Si $M \neq \Omega$, dire que M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ signifie que :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

Ce qui se traduit en termes d'affixes par :

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

On en déduit que : $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$ d'où $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Cas particulier

Si $\Omega = O$, l'écriture complexe de la rotation devient : $z' = e^{i\theta} z$.

Exemple 9. On donne deux points distincts $A(a)$ et $B(b)$. On construit le carré ABCD de sens direct. Quelle est l'affixe ω du centre Ω du carré ABCD?

Il suffit de remarquer que B est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$b - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - \omega) = i(a - \omega) \iff \omega(1 - i) = ai - b \iff \omega = \frac{ai - b}{1 - i}.$$

Exercice 10. 1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 4$, $z_B = 1 + 3i$ et $z_C = 1 - i$.

- Déterminer l'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis trouver l'image C' du point C .
- Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ puis trouver l'image A' de A .
- Déterminer le rapport de l'homothétie de centre $\Omega(1)$ qui transforme B en C .
- Déterminer le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme B en C .

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$\mathbf{a)} \quad T_1 : z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2i(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}) \quad \mathbf{b)} \quad T_2 : z' = -\sqrt{3}z + (4 + i)(1 + \sqrt{3})$$

I - Similitudes directes

Définition 11 (Rappel). On appelle similitude plane directe, toute transformation du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui multiplie les distances par un nombre réel $k > 0$, appelé *rapport* et qui conserve les mesures d'angles.

Les éléments caractéristiques d'une similitude directe sont :

- le rapport,
- le centre,
- l'angle.

Exemple 12. — Une translation de vecteur non nul est une similitude directe de rapport $k = 1$ et d'angle $\theta = 0$.

- Une homothétie de centre Ω et de rapport k est une similitude directe de centre Ω , de rapport $|k|$ et d'angle $\theta = 0$ si $k > 0$ ou $\theta = \pi$ si $k < 0$.
- Une rotation de centre Ω et d'angle θ est une similitude directe de rapport $k = 1$, de centre Ω et d'angle θ .

Toute similitude directe S de centre Ω , de rapport k et d'angle θ est notée par $S(\Omega, k, \theta)$. Ω , k et θ sont les éléments caractéristiques de la similitude directe.

Propriétés géométriques d'une similitude directe

Soit S la similitude directe de centre Ω , de rapport k et d'angle θ qui transforme le point $M(z)$ en $M'(z')$.

$$S(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M' = k \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

Remarque 13. — Le centre de la similitude est le seul *point invariant*.

- Une similitude directe qui n'admet pas de point invariant est une translation.

Propriété 14. — Une similitude directe multiplie :

- les distances par k ,
- les aires par k^2 .
- Une similitude directe conserve :
 - l'alignement des points,
 - le parallélisme,
 - l'orthogonalité,
 - le contact.
 - le barycentre
 - les angles orientés.

- Par une similitude directe S l'image d'une droite Δ passant les points A et B est une droite Δ' passant par les images A' et B' de A et B par S .
- Par une similitude directe S l'image d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r est un cercle $\mathcal{C}'$ de centre I' image de I par S et de rayon kr .
- La réciproque d'une similitude directe $S(\Omega, k, \theta)$ est une similitude directe $S^{-1}(\Omega, \frac{1}{k}, -\theta)$.
- La composée de deux similitudes directes de même centre, est une similitude directe de même centre, de rapport le produit des rapports et d'angle, la somme des angles.

$$S(\Omega, k, \theta) \circ S'(\Omega', k', \theta') = S(\Omega, k + k', \theta + \theta')$$

Remarque 15. Soit la similitude directe $S(\Omega, k, \theta)$. Alors :

$$\underbrace{S \circ S \circ S \cdots S \circ S \circ S}_{n \text{ fois}} = S(\Omega, k^n, n\theta)$$

Expression complexe d'une similitude directe

Activité d'introduction 16. Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O; I, J)$.

On considère l'application f du plan complexe $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z + 2 - 3i$.

1. Déterminer l'image A' du point A d'affixe $2 + i$.
2. Quelle est l'affixe de l'image du point O ? du point I ? du point J ?
3. Déterminer l'affixe de l'antécédent du point $B'(-2i)$.
4. Quelle est l'affixe de l'antécédent du point O ?
5. Déterminer le point Ω dont l'affixe ω vérifie $f(\omega) = \omega$.
6. Exprimer z en fonction de z' sous la forme $z = az' + b$ où a et b sont des nombres complexes écrits sous forme algébrique.

Activité d'introduction 17. On considère l'application f du plan complexe $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe son image M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes non nuls.

On donne les points $A(1)$, $B(i)$, $A'(1 + 2i)$ et $B'(-1 + 6i)$

1. Déterminer a et b sachant que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
2. Déterminer ω tel que $f(\omega) = \omega$.
3. Exprimer $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.
4. En posant $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$ exprimer x' et y' en fonction de x et y .

Théorème 18 (Écriture complexe). La similitude directe S de centre Ω d'affixe ω , de rapport k et d'angle θ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que : $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ ou $z' = ke^{i\theta}z + \omega(1 - ke^{i\theta})$.

Démonstration

$$S(M) = M' \iff \left\{ \begin{array}{l} \Omega M' = k \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \quad [2\pi] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = k \\ \arg\left(\frac{\Omega M'}{\Omega M}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = k \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\iff \frac{z' - \omega}{z - \omega} = ke^{i\theta} \iff z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega) \text{ ou } z' = ke^{i\theta}z + \omega(1 - ke^{i\theta}).$$

Conséquence 19. Toute similitude directe a une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et z' l'affixe de l'image du point d'affixe z .

Réciproque

Toute transformation f admettant une écriture de la forme : $z' = az + b$ avec $a \neq 0$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \arg a$.

Démonstration

Soient M et N points quelconques du plan d'images respectives M' et N' par f .

$$\begin{cases} z_{N'} = az_N + b \\ z_{M'} = az_M + b \end{cases} \text{ alors } z_{N'} - z_{M'} = a(z_N - z_M) \text{ d'où } |z_{N'} - z_{M'}| = |a| |z_N - z_M|.$$

$$\text{D'où } M'N' = |a| \times MN$$

Et $a \neq 0$, donc f est une similitude de rapport $|a|$.

De plus, comme $a \neq 0$, son argument existe et $\arg(z_{N'} - z_{M'}) = \arg a + \arg(z_N - z_M)$

$$\text{Donc : } (\vec{u}, \overrightarrow{M'N'}) = \arg a + (\vec{u}, \overrightarrow{MN}).$$

$$\text{D'où : } (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \arg a$$

f est une similitude et l'angle entre un vecteur et son image est constant donc :

f est donc une similitude directe et son angle vaut cette constante : $\arg a$.

Théorème 20. Soient A, B, A' et B' quatre points donnés du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors, il existe une unique similitude directe s telle que : $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

Démonstration

Si une telle similitude s existe alors il existe deux nombres complexes a et b , avec $a \neq 0$ tels que :

$$z_{A'} = az_A + b \text{ et } z_{B'} = az_B + b$$

$$\text{alors : } z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A) \text{ soit } a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \text{ et on a : } b = z_{A'} - az_A$$

Si s existe, le couple (a, b) est unique et s est donc elle aussi unique.

$$\text{Soit } s \text{ la similitude directe dont l'écriture complexe est } z' = az + b \text{ où } a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} \text{ et } b = z_{A'} - az_A.$$

B étant différent de A , donc a est défini.

$$z_{A'} = az_A + b \text{ et } z_{B'} - z_{A'} = az_B - az_A$$

$$\text{Donc } z_{B'} = az_B - az_A + z_{A'} = az_B + b$$

De plus, comme $B \neq A$, donc a est non nul et s est donc définie.

$$\text{D'où : } s(A) = A' \text{ et } s(B) = B'.$$

Une similitude directe transformant A en A' et B en B' existe donc et est unique.

Expression analytique d'une similitude directe

À partir de l'écriture complexe d'une similitude s directe, on peut en déduire l'écriture analytique. Pour cela on remplace z par $x + iy$ et z' par $x' + iy'$ dans $z' = az + b$. Puis on exprime x' et y' en fonction de x et y .

Exemple 21. Soit $s : z' = (1 - i)z + 1 + 5i$

$$x' + iy' = (1 - i)(x + iy) + 1 + 5i \iff x' + iy' = x + y + 1 + i(-x + y + 5) \iff \begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y + 5 \end{cases}$$

Utilisation des nombres complexes pour déterminer la nature d'une transformation géométrique

Théorème 22. Soit une similitude directe s d'écriture complexe : $z' = az + b$ avec $a \neq 0$.

- si $a = 1$: s est la translation de vecteur d'affixe b .
- si $a \neq 1$: alors s admet un unique point invariant d'affixe : $\omega = \frac{b}{1 - a}$ et s est la composée :
 - de l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $|a|$ (rapport de s) et
 - de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle : $\arg a$ (angle de s) Ω est appelé le centre de la similitude directe s .
 Et une écriture complexe de s est alors $z' - \omega = |a|e^{i\arg a}(z - \omega)$.
- si $|a| = 1$ et $a \neq 1$ alors s est une rotation de centre d'affixe $\omega = \frac{b}{1 - a}$ et d'angle $\arg a$.
- si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ alors s est une homothétie de centre d'affixe $\omega = \frac{b}{1 - a}$ et de rapport a .

Récapitulatif des écritures complexes

Transformation	Écriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}$	$z' = z + b$ (b = affixe de $\vec{u}$)
Homothétie de centre Ω , rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$ (ω = affixe de Ω)
Rotation de centre Ω , angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ (ω = affixe de Ω)
Similitude directe de centre Ω , $k > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$	$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ (ω = affixe de Ω)

Exercice 23. 1. Identifier la transformation définie par l'écriture complexe donnée et préciser ses éléments caractéristiques

a) $z' = z - i\sqrt{3}$

b) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z - i$

c) $z' = 4z - 2i$

d) $z' = -iz + 1 + i$

2. Donner l'écriture complexe des similitudes directes ci-dessous de centre Ω d'affixe ω , de rapport k et d'angle θ .

a) $\omega = 2 + i, k = 2, \theta = \frac{\pi}{2}$

b) $\omega = -i, k = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}$

c) $\omega = 1 + 2i, k = 3, \theta = \frac{\pi}{2}$

d) $\omega = 0, k = \sqrt{3}, \theta = \frac{3\pi}{4}$

d) $\omega = 1 + i, k = 2, \theta = \pi$

e) $\omega = -1, k = 7, \theta = 0$