13 Équations différentielles

Les équations différentielles : un outil fondamental
Les équations différentielles occupent une place centrale en analyse mathématique depuis plusieurs siècles. Elles permettent de modéliser de nombreux phénomènes réels dans des domaines variés tels que la physique, la mécanique, l'astronomie, la chimie, la biologie ou encore l'économie. Historiquement, elles sont nées des besoins de la physique, où il s'agissait de décrire l'évolution de systèmes dynamiques. Des mathématiciens célèbres comme Clairaut, Bernoulli, d'Alembert, Lagrange, Cauchy ou encore Lipschitz ont contribué à leur développement.

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur un cas particulier : les équations différentielles linéaires à coefficients constants et à second membre nul, qui sont à la fois simples à manipuler et riches en applications.

Activité d'introduction 1. Une expérience consiste à étudier l'évolution d'une population de bactéries.
On désigne par N_0 le nombre de bactéries à l'instant $t = 0$, $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t et on note $N'(t)$ la vitesse instantanée d'évolution des bactéries l'instant t.

1. On constate que $N(t) = 9000\mathrm{e}^{-0,4t}$.
   (a) Donner le nombre de bactéries à l'instant $t = 0$, $t = 10$ et $t = 20$.
   (b) Donner une relation R entre N et N'.
   (c) Déterminer la vitesse instantanée d'évolution aux instants $t = 10$ et $t = 20$.

I - Généralités

Définition 2. On appelle **équation différentielle**, toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Notation 3. La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives y', y'', $y''' \cdots$

Exemple 4. $y' - 5y = 0$, $2y'' - y' + 3y = x - 3$ sont des équation différentielles.

Vocabulaire

— Une équation différentielle est dite **d'ordre n** lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est n.

— Une équation différentielle est dite **linéaire** si elle ne contient pas de puissances de y ou y', y'' ou $y''' \cdots$ d'exposants supérieurs ou égaux à 2 , ni leur produit.

— Une équation différentielle est dite **homogène** lorsque le second membre de cette équation est nul.

Ainsi, $2y'' - y' + 3y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2.
L'expression « sans second membre » est un abus de langage qui signifie que le second membre est nul.

— Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle I est appelée **solution sur** I de cette équation différentielle.

— **Résoudre ou (intégrer)** une équation différentielle sur un intervalle ouvert I, c'est déterminer l'ensemble des solutions sur I de cette équation différentielle.

II - Équations différentielles du premier ordre

Définition 5. Une équation différentielle linéaire homogène du 1^{er} ordre à coefficients constants est une équation du type $y' - ay = 0$ ou toute équation s'y ramenant, a et b sont des constantes réelles et y une fonction inconnue à déterminer, définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résolution

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) $y' - ay = 0$ $(a \in \mathbb{R})$
• La fonction nulle est solution de (E) (évident).
Soit y une solution de (E) ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\text{On a} : y' - ay = 0 &\Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = a \\ &\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ \ln|y| = ax + c \\ &\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, |y| = \mathrm{e}^c \mathrm{e}^{ax}.\end{aligned}$$

La fonction y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; donc elle est de signe constant.
On en déduit que : $\exists k \in \mathbb{R}^*$, tel que $y = k\mathrm{e}^{ax}$.
Ainsi, en ajoutant la fonction nulle, les fonctions $x \longmapsto k\mathrm{e}^{ax}$ $(k \in \mathbb{R})$ **sont solutions de (E)**.
• Démontrons que toute solution de (E) est de cette forme.
Soit y une solution de (E) et h la fonction $x \longmapsto y(x)\mathrm{e}^{-ax}$
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $h' : x \longmapsto [y'(x) - ay(x)]\,\mathrm{e}^{-ax}$
Or $y' - ay = 0$ donc h' est la fonction nulle et h est une fonction constante.
Il existe un nombre réel k tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x)\mathrm{e}^{-ax} = k$
c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = k\mathrm{e}^{ax}$;
Donc toute solution de (E) est de la forme $x \longmapsto k\mathrm{e}^{ax}$ $(k \in \mathbb{R})$
De cette étude, on en déduit la propriété suivante :

Propriété 6. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sont les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$ $(k \in \mathbb{R})$.

Exemple 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles $y' - y = 0$ et $y' + 3y = 0$

Solution. • Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto ke^x$ $(k \in \mathbb{R})$
• Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$y' + 3y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-3x}$ $(k \in \mathbb{R})$ □

Solution vérifiant une condition initiale

Reprenons l'équation différentielle (E) $\quad y' - ay = 0$
Soit x_0 et y_0 deux nombres réels.
On se propose de déterminer les solutions y sur $\mathbb{R}$ de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$.

$$\begin{aligned} \text{On a } : y(x_0) = y_0 &\Leftrightarrow ke^{ax_0} = y_0 \\ &\Leftrightarrow k = y_0 e^{-ax_0} \quad \text{unique} \end{aligned}$$

Donc la fonction $x \mapsto y_0 e^{-a(x-x_0)}$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$.
On en déduit la propriété suivante :

Propriété 8. Pour tout couple $(x_0\,, y_0)$ de nombres réels, l'équation différentielle $y' - ay = 0$ $(a \in \mathbb{R})$ admet une unique solution y sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0.

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - \frac{1}{3}y = 0$
En déduire la solution qui prend la valeur 1 en $\ln 8$.

Solution. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{3}y = 0$; sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{1}{3}x}$ $(k \in \mathbb{R})$
Déterminons parmi ces solutions celle qui prend la valeur 1 en $\ln 8$.
On a : $1 = ke^{-\frac{1}{3}\ln 8} \iff k = 2$
Donc la fonction $f : x \mapsto 2e^{-\frac{1}{3}x}$ est l'unique solution $\mathbb{R}$ vérifiant $f(\ln 8) = 1$. C'est celle dont la courbe passe par le point de coordonnées $(1, \ln 8)$. □

Remarque 10. Les équations différentielles du type $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ modélisent des situations très diverses, où la vitesse de variation y' d'une quantité est proportionnelle à cette quantité même y . Par exemple l'accroissement d'une population, en un temps t, proportionnel à la taille de cette population.

Exercice 11. Une substance chimique se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. A l'instant $t = 0$ (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau.
Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, déterminer une

expression de la quantité non dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t.

Cas d'une équation différentielle avec second membre

Exercice 12. Soient les équations différentielles : (E_0) $y' + y = 0$ et (E) $y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos x$.
1) Trouver les réels a et b pour que h soit solution de(E), avec $h(x) = (a\cos x + b\sin x)\mathrm{e}^{-x}$.
2) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).
3) Résoudre (E_0).
4) Déduire des questions précédentes, la solution générale de (E).

Solution. 1) On a $h'(x) + h(x) = ((b-a)\cos x + (-b-a)\sin x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\cos x$
Donc $b - a = 1$ et $-b - a = 0$ càd $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$
2) Supposons que f est solution de (E)

On a : $\begin{cases} f' + f = 0 \\ h' + h = 0 \end{cases}$ Donc par différence membre à membre $f' - h' + f - h = 0$ càd
$(f-h)' + (f-h) = 0$ d'où la fonction $f - h$ est solution de (E).

Supposons que $f - h$ est solution de (E_0)

On a $(f-h)' + (f-h) = 0 \Longleftrightarrow f' + f = h' + h = \mathrm{e}^{-x}\cos x$ d'où f est solution de (E).

3) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{-x}$ $(k \in \mathbb{R})$.
4) D'après 2) f est solution de (E) $\Longleftrightarrow f - h$ est solution de (E_0)
Donc f est solution de (E) $\Longleftrightarrow f - h = \mathrm{e}^{-x}\cos x$
D'où f est solution de (E) $\Longleftrightarrow f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos x + \left(\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x\right)\mathrm{e}^{-x}$
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos x$ sont les fonctions
$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos x + \left(\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x\right)\mathrm{e}^{-x}$. □

III - Équations différentielles du second ordre

Définition 13. Une équation différentielle linéaire homogène du 2nd ordre à coefficients constants est une équation du type $y'' + ay' + by = 0$ ou toute équation s'y ramenant, et a et b sont des constantes réelles et y une fonction inconnue à déterminer, définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 14. Équation caractéristique On appelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$ $(A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R})$, l'équation du second degré d'inconnue r : $r^2 + ar + b = 0$.

Exemple 15. Les équations caractéristique de chacune des équations différentielles suivantes
$y'' - 4y + 3y = 0$ et $y'' - 36y = 0$ sont respectivement $r^2 - 4r + 3 = 0$ et $r^2 - 36 = 0$..

Méthode de résolution

Pour résoudre sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle du type $y'' + ay' + by = 0$ $(A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R})$, on peut résoudre l'équation caractéristique
$r^2 + ar + b = 0$ et utiliser le tableau suivant.

$\Delta = a^2 - 4b$	Racines	Solutions de $y'' + ay' + by = 0$
$\Delta = 0$	$r_0 \in \mathbb{R}$	$(Ax + B)e^{r_0 x}$
$\Delta > 0$	$r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$	$Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Exercice 16. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 6y' + 9y = 0$
2. $y'' + 5y' + 4y = 0$
3. $y'' + 2y' + 2y = 0$
4. $2y'' - 18y = 0$

Solution.

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 6r + 4 = 0$ donc $r_0 = 3$
   D'où les solutions sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle sont les fonctions $x \longmapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{3x}$ $(A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R})$

2. L'équation caractéristique est $r^2 + 5r + 4 = 0$ donc $r_1 = -4$ et $r_2 = -1$
   D'où les solutions sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle sont les fonctions $x \longmapsto A\mathrm{e}^{-3}x + B\mathrm{e}^{-x}$ $(A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$

3. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$ donc $r_1 = -1 - \mathrm{i}$ et $r_2 = -1 + \mathrm{i}$
   D'où les solutions sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle sont les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}(A\cos x) + B\sin x)$ $(A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R})$

4. L'équation caractéristique est $2r^2 - 18 = 0$ donc $r_1 = 3$ et $r_2 = -3$
   D'où les solutions sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle sont les fonctions $x \longmapsto A\mathrm{e}^{-3x} + B\mathrm{e}^{3x}$ $(A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$

□

Solution vérifiant une condition initiale

Propriété 17. Pour tous nombres réels x_0, y_0 et z_0, l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ $(A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R})$ admet une unique solution y sur $\mathbb{R}$ telle que : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$

Exemple 18. Déterminons la solution h sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$ sont les fonctions

$$x \longmapsto A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{-x} \ \ (A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}))$$

Pour $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, on a $A + B = 1$ et $2A - B = 0$ donc $A = \dfrac{1}{3}$ et $B = \dfrac{2}{3}$.
D'où $h : x \longmapsto \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-x}$ $(A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R})$

□