1 Fonctions numériques. Rappels et compléments

I - Limites

Lorsque nous écrivons ∞ cela signifie que c'est valable pour $+\infty$ comme pour $-\infty$
Il existe quatre cas d'indétermination dans les opérations sur les limites :

$$<< +\infty - \infty >>; \quad << \frac{\infty}{\infty} >>; \quad << \frac{0}{0} >>; \quad << 0 \times \infty >>$$

Limites usuelles

$n \in \mathbb{N}^*$

— $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

— $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n pair} \\ -\infty & \text{si n impair} \end{cases}$

— $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

— $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

— $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

— $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

Remarque 1. Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limites à l'infini.

Limite de la composée de deux fonctions

Propriété 2. Soient f et g deux fonctions, a, b et c trois réels pouvant éventuellement être $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si} \lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} g(x) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} g[f(x)] = c$$

Exemple 3. Calculons $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{x+1}{x^2-2}\right)$
On a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2-2} = 0$ et $\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ donc par composée $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{x+1}{x^2-2}\right) = 1$

Comparaisons de limites

Théorème 4. Soient f, g et h trois fonctions et $l \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$.

Hypothèse 1	Hypothèse 2	Conclusion
$f \leq g$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$
$f \leq g$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
$\lvert f(x) - l \rvert \leq g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
$g \leq f \leq h$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = l$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Remarque 5. Le dernier théorème est parfois appelée « le théorème des gendarmes ».

Exemple 6. — Soit $f(x) = x + 3\cos x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x - 3 \leq f(x) \leq x + 3$

· On a : $x - 3 \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

· On a : $f(x) \leq x + 3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

— Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Pour tout $x \geq 1$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

En multipliant par $\dfrac{1}{x}$: on a $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

Limites et nombre dérivé

Théorème 7. Soit f une fonction dérivable.

$$\text{Si } \lim_{x \to a} f'(x) = l, \ (l \text{ réel fini ou pas}) \text{ alors } \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Exemple 8. Calculons $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Posons $f(x) = \sin x$

On a $f(0) = 0$ et $f'(x) = \cos x$

$$\text{Donc } \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

II - Branches infinies d'une courbe

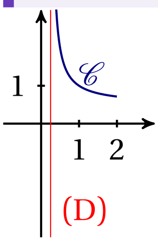
Soit une fonction numérique f et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Asymptotes

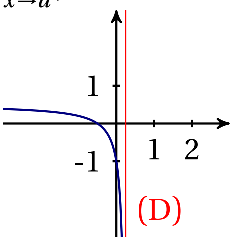
Asymptote verticale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite infinie en un réel a.

Définition 9. Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation (D) $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.



$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

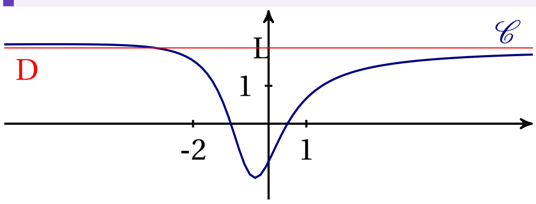


$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Asymptote horizontale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite finie à l'infini.

Définition 10. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ (réel) alors la droite $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en ∞.



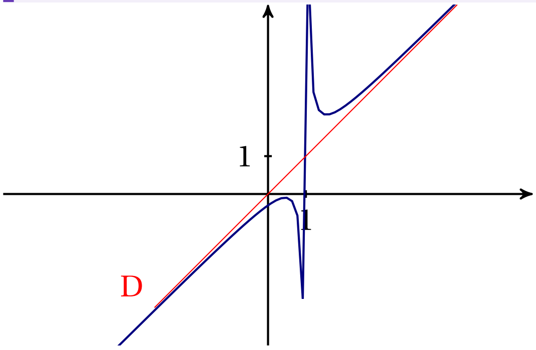
Exemple 11. Pour la fonction $f : x \mapsto 3 + \dfrac{5}{x-1}$

— la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale

— la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Asymptote oblique

Définition 12. Soit f une fonction et Δ la droite d'équation $y = ax + b$.
Si $\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f en ∞.



Exemple 13. Pour la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{2}{x-1}$ dont la courbe est représentée ci dessous, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f.

Remarque 14. Si f s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b + g(x)$ et si $\lim_{x\to\infty} g(x) = l$ (réel) alors la droite $y = ax + b + l$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en ∞.

Exemple 15. Pour la fonction $f : x \mapsto 2x + 5 - \dfrac{2x}{x-1}$ la droite d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote oblique à sa courbe en ∞ car $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2$.

Position relative d'une courbe et son asymptote

Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f par rapport à son asymptote $\Delta : y = ax + b$, on étudie le signe de la différence $f(x) - ax - b$.

— Si $f(x) - ax - b > 0$ alors $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la courbe de Δ

— Si $f(x) - ax - b < 0$ alors la courbe de $\mathscr{C}$ est située en-dessous de la courbe de Δ

— Si $f(x) - ax - b = 0$ alors la courbe de $\mathscr{C}$ et Δ sont sécantes.

On tiendra compte de l'ensemble sur lequel on doit étudier la position relative des deux courbes.

2. Recherche de branches infinies

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, la courbe $\mathscr{C}$ présente une branche infinie qu'il faut étudier.

— Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe $\mathscr{C}$ présente une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

— Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ alors la courbe $\mathscr{C}$ présente une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

— Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ réel non nul alors on calcule $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$

• Si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax) = b$ (réel) alors la droite (D) d'équation : $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

• Si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax) = \infty$ alors la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$.

Exercice 16. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x+3-\dfrac{2}{x-1} & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$

1. Déterminer les limites aux bornes de D_f.
2. Etudier la nature des branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote oblique.

Solution. 1. $f(x)$ existe ssi $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x < 2 \end{cases}$

$f(x)$ existe ssi $\begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \neq -1 \\ x < 2 \end{cases}$

$f(x)$ existe ssi $x \geq 2$ ou $x \in]-\infty\,,\,-1[\,\cup\,]-1\,,\,2[$

donc $f(x)$ existe ssi $x \in]-\infty\,,\,-1[\,\cup\,]-1\,,\,2[\,\cup\,[2\,,\,+\infty[$

D'où $D_f =]-\infty\,,\,-1[\,\cup\,]-1\,,\,+\infty[$

Limites aux bornes de D_f $\lim\limits_{x\to+\infty} x+4 = +\infty$ par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+4} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+3-\dfrac{2}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} x+3 - \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x-1} = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

L'étude de la limite en 1 se fait uniquement sur la restriction $x \mapsto x+3-\dfrac{2}{x-1}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+} x+3 = 4 \\ \lim\limits_{x\to1^+} -\dfrac{2}{x-1} = -\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} x+3 = 4 \\ \lim\limits_{x\to1^-} -\dfrac{2}{x-1} = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$

2. Puisque $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

Puisque la restriction de f sur $]-\infty\,,\,2[$ s'écrit sous la forme $x \mapsto x+3-\dfrac{2}{x-1}$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$ donc la droite Δ d'équation $y=x+3$ est une asymptote oblique à la courbe de f.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ doc $\mathscr{C}_f$ présente une branche infinie en $+\infty$.

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}=1\times 0=0$ d'où $\mathscr{C}_f$ admet un branche parabolique d'axe (Ox).

3. Etudions la position relative de Δ et $\mathscr{C}_f$.

Pour cela étudions le signe de $f(x)-(x+3)=-\dfrac{2}{x-1}$ pour $x<2$

x	$-\infty$		1		2
signe de $-\dfrac{2}{x-1}$		+	|	−	

Sur $]-\infty\,,\,1[$ $-\dfrac{2}{x-1}>0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ.

Sur $]-\infty\,,\,1[$ $-\dfrac{2}{x-1}<0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessous de Δ.

□

III - Continuité

Continuité en un réel

Définition 17. Une fonction f est continue en un réel a ssi $a\in D_f$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Exemple 18. Soit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1\\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x=1\end{cases}$

Etudions la continuité de f en 1.

Pour $x\neq 1$, $f(x)$ existe si et seulement, si $x\geq 0$ et $x-1\neq 0$

si et seulement, si $x\geq 0$ et $x\neq 1$

si et seulement, si $x\in[0\,,\,1[\cup]1\,,\,+\infty[$

Or $f(1)=\dfrac{1}{2}$ d'où $f(x)$ existe si et seulement, si $x\in[0\,,\,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=\dfrac{1}{2}$ d'où f est continue en 1.

Continuité à droite - continuité à gauche

Propriété 19. f est continue en a si et seulement, si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Prolongement par continuité

Définition 20. Soit f une fonction **non** définie en a et l un nombre réel tel que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
On appelle **prolongement par continuité** de f en a, la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ l & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

NB : La fonction g est définie et continue en a.

Exemple 21. Montrons que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ est prolongeable par continuité en 2 et trouvons son prolongement par continuité.

Réponse :
$f(x)$ existe si et seulement, si $x \neq 2$.
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 3$ finie donc f est prolongeable par continuité en 2.
Son prolongement par continuité en 2 est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

IV - Dérivabilité

Dérivabilité en un réel

Définition 22. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l tel que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$
l est le **nombre dérivé** de f en a. On le note $f'(a)$.

Autre formulation de la définition
On fait le changement de variable suivant $h = x - a$
f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l tel que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$

Exemple 23. Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$
Etudions la dérivabilité de f en 1.

Réponse :
On avait trouvé que $D_f = [0\,,\ +\infty[$
$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2\sqrt{x}-(x+1)}{2(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{-x^2+2x-1}{2(x-1)^2(2\sqrt{x}+x+1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{-1}{2(2\sqrt{x}+x+1} = -\dfrac{1}{8}$
Donc f est dérivable en 1 et de nombre dérivé $f'(1) = -\dfrac{1}{8}$.

Propriété

Propriété 24. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a

.

Contre-exemple 25. La réciproque de cette propriété est fausse.
La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

Propriété : Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

Propriété 26. f est dérivable en a si et seulement, si :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \quad \text{réel}$$

$$f'_d(a) = f'_g(a)$$

Le nombre dérivé de f à droite en a = Le nombre dérivé de f à gauche en a

Notation 27. Les notations $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ s'utilisent que lorsque la limite du taux de variation est un réel.

Cas de non dérivabilité

· Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $-\infty$ alors f n'est pas dérivable en a.

· Si $f_d'(a) \neq f_g'(a)$ alors f n'est pas dérivable en a.

Interprétation graphique de la dérivabilité

1. Si f est dérivable en a alors sa courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse a c-à-d le point $A(a, f(a))$ une **tangente** de coefficient directeur (ou pente) $f'(a)$ d'équation : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

> *Remarque* 28. $f'(a) = 0$ si et seulement si $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse a une tangente horizontale d'équation $y = f(a)$.
> Dans ce cas, le point $A(a, f(a))$ est soit un **extremum** (maximum ou minimum) soit un **point d'inflexion**.

2. Si f est dérivable à droite et à gauche de a telle que $f_d'(a) \neq f_g'(a)$ alors $\mathscr{C}$ admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes de pentes respectives $f_d'(a)$ et $f_g'(a)$: le point A est un point **anguleux**.

3. Détaillons les cas d'une limite infinie.

Si • $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.	Si • $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.
Si • $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$, la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.	Si • $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$, la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

4. Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales dirigées vers le haut d'équation $x = a$. A est un **point de rebroussement**.

5. Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales dirigées vers le bas d'équation $x = a$. A est un point de rebroussement.

6. Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales de même équation $x = a$ l'une dirigée vers le haut et l'autre vers le bas. A est un point d'inflexion.

7. Si $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ deux demi-tangentes verticales de même équation $x = a$ l'une dirigée vers le haut et l'autre vers le bas. A est un point d'inflexion à tangente verticale.

V - Continuité et dérivabilité sur un intervalle

Définition 29. — f est continue (resp. dérivable) sur l'intervalle I si elle est continue (resp. dérivable) en tout réel $x \in I$.

— La fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x s'appelle **fonction dérivée ou dérivée** de f et est notée $f' : x \mapsto f'(x)$.
L'ensemble des réels x pour lesquels $f'(x)$ existe est appelé **ensemble ou domaine de dérivabilité de** f : c'est le domaine de définition de f'.

Rappelons ci-dessous les fonctions dérivées de certaines fonctions usuelles.

Fonction f définie par :	**Dérivable sur**	**Fonction dérivée $f'(x)$**
$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$f(x) = \tan x$	$\left](2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[,\ k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x$ ou $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Propriété 30. Soient f et g deux fonctions continues (resp. dérivables) sur un intervalle I.

— les fonctions $f + g$ et fg sont continues (resp. dérivables) sur I.

— Si de plus $g \neq 0$ sur I alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues (resp. dérivables) sur I.

Cas particuliers

— Les fonctions polynômes sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

— Les fonctions rationnelles sont continues et dérivables sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

— Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue et dérivable sur tout intervalle du type $\left](2k-1)\dfrac{\pi}{2}\ ,\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Image d'un intervalle par une fonction continue

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème 31. Si f est une fonction *continue* sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle .

Cas particuliers
Le tableau suivant donne les images de quelques intervalles simples par une fonction **continue et strictement monotone** . a et b peuvent être éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$.

	$f(I)$ si f continue et strictement croissante	$f(I)$ si f continue et strictement décroissante
$I=[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),f(a)\right]$
$I=]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),f(b)\right]$	$\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$I=]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$

Continuité et dérivabilité de la composée de deux fonctions

Propriété 32. · Si f est continue sur l'intervalle I et g continue sur l'intervalle $f(I)$ alors la fonction $g\circ f$ est continue sur I.
· Si f est dérivable sur l'intervalle I et g dérivable sur l'intervalle $f(I)$ alors la fonction $g\circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$, on a :

$$(g\circ f(x))'=f'(x)\times g'[f(x)]$$

Exemple 33. Soit $h(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculons $h'(x)$.
On a $D_h=]-\infty\,,\,0[\cup]0\,,\,+\infty[$
Attention : Avant de dériver une fonction, il est recommandé de justifier sa dérivabilité même si la question ne le précise pas.
La fonction rationnelle $x\mapsto\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,\,0[$ et $]0\,,\,+\infty[$.
La fonction $x\mapsto\cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; en particulier sur chacun des intervalles $]-\infty\,,\,0[$ et $]0\,,\,+\infty[$
D' où par composée h est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,\,0[$ et $]0\,,\,+\infty[$.
Pour tout $x\neq 0$: $h'(x)=\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Conséquence 34. · Si f est dérivable (resp. continue) sur I et g dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $g \circ f$ est dérivable (resp. continue) sur I.
· Si f est **continue et positive** sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.
· Si f est **dérivable et strictement positive** sur I alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I.

Formules de dérivations

Soient u et v deux fonctions dérivables, $r \in \mathbb{Z}^*$ et $k \in \mathbb{R}$

Fonction	ku	$u+v$	uv	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{1}{v}$	$\sqrt{u}$	u^r
Dérivée	ku'	$u'+v'$	$u'v+v'u$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$ru'u^{r-1}$

$v \circ u$	$\sin u$	$\cos u$	$\tan u$
$u' \times (v' \circ u)$	$u' \cos u$	$-u' \sin u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

Exercice 35. Soit $f(x) = \dfrac{(x+1)\sqrt{x-2}}{x-1}$.

1. Etudier la continuité de f sur son D_f.
2. Etudier la dérivabilité de f sur son D_f.
3. Calculer $f'(x)$.

Solution. 1. $f(x)$ existe si et seulement, si $x \geq 2$ et $x \neq 1$ donc $D_f = [2\,,\,+\infty[$

1re méthode

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est une fonction rationnelle définie sur $[2\,,\,+\infty[$ donc continue sur $[2\,,\,+\infty[$

La fonction $x \longmapsto x-2$ est continue et positive sur $[2\,,\,+\infty[$ donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur $[2\,,\,+\infty[$ par composée.

On en déduit que f est continue sur D_f comme produit et composée de fonctions continues.

2re méthode

La fonction $x \longmapsto x+1$ est continue sur $[2\,,\,+\infty[$,

La fonction $x \longmapsto x-1$ est continue et non nulle sur $[2\,,\,+\infty[$,

La fonction $x \longmapsto x-2$ est continue et positive sur $[2\,,\,+\infty[$ donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{x-2}$ est continue sur $[2\,,\,+\infty[$ par composée.

On en déduit que f est continue sur D_f comme produit, quotient et composée de fonctions continues.

2. **1re méthode**

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ est une fonction rationnelle définie sur $[2\,,\,+\infty[$ donc dérivable sur $[2\,,\,+\infty[$

La fonction $x \mapsto x-2$ est dérivable et strictement positive sur $]2\,,\,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est dérivable sur $]2\,,\,+\infty[$. par composée.
On en déduit que f est dérivable sur $]2\,,\,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

2^re méthode
La fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $[2\,,\,+\infty[$
La fonction $x \mapsto x-1$ est dérivable et non nulle sur sur $]2\,,\,+\infty[$
La fonction $x \mapsto x-2$ est dérivable et strictement positive sur $]2\,,\,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est dérivable sur $]2\,,\,+\infty[$ par composée.
On en déduit que f est dérivable sur $]2\,,\,+\infty[$ comme produit, quotient et composée de fonctions dérivables.

3. $\forall x > 2,\, f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \times \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} \times \dfrac{x+1}{x-1}$
   Soit $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+7}{2(x-1)^2\sqrt{x-2}}$

□

Dérivée et sens de variations

Théorème 36. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\, f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I.
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\, f'(x) \leq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I.
- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\, f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\, f'(x) \leq 0$.

Signe d'une fonction à partir de ses variations

Les cas classiques :

x			
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$+\min$	$\nearrow$

Si $f(x)$ admet un minimum positif sur I alors f est positive sur I.

x			
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Si $f(x)$ admet un maximum négatif sur I alors f est négative sur I.

x		α	
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

$f(x)$ est positif si $x \leq \alpha$.
$f(x)$ est négatif si $x \geq \alpha$.

x		α	
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$f(x)$ est négatif si $x \leq \alpha$.
$f(x)$ est positif si $x \geq \alpha$.

Dérivées successives

Définition 37. Soit f une fonction dérivable sur I, sa fonction dérivée f' est appelée *fonction dérivée première* et est notée $f^{(1)}$.
Si f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable alors dans ce cas la fonction dérivée de f' c'est à dire $(f')'$ est appelée *fonction dérivée seconde* de f et est notée f'' ou $f^{(2)}$.
Si f'' est à son tour dérivable sur I, alors sa fonction dérivée est appelée *fonction dérivée troisième* de f et est notée f''' ou $f^{(3)}$.
Par itération si la dérivée n-ième de f existe, on la note $f^{(n)}$.

Exemple 38. $f(x) = x \sin x$
$f'(x) = \sin x + x \cos x$, $f''(x) = 2\cos x + x \sin x$, $f^{(3)}(x) = -3\sin x + x\cos x$, etc.

Remarque 39. · $f^{(n)}$ est aussi appelée *dérivée d'ordre n de f*.
· En **Physique** $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ sont notées respectivement $\dfrac{df}{dx}, \dfrac{d^2f}{dx^2}, \cdots, \dfrac{d^nf}{dv^n}$.

Notion de différentielle

Une petite variation Δx de la variable x provoque une petite variation $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ des images.
Lorsque Δx est voisin de 0, on assimile $dx = \Delta x$ et on peut écrire : $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ou $dy = f'(x)dx$ ou $dy = f'(x)\Delta x$.

Exemple 40. Pour la fonction $y = 2x^2 - x$ avec $x = 1$ et $\Delta x = 0,01$
Vérifier que la différentielle $dy = 0,03$ et l'accroissement $\Delta y = 0,0302$

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Nous admettons le résultat suivant :
Si f est une fonction deux fois dérivable sur I et si f'' est négative sur I, alors la courbe $\mathscr{C}$ de f est en dessous de toutes ses tangentes. On dit que $\mathscr{C}$ est **concave.**
Si f est une fonction deux fois dérivable sur I et si f'' est positive sur I, alors la courbe $\mathscr{C}$ de f est en dessus de toutes ses tangentes. On dit que $\mathscr{C}$ est **convexe.**

Point d'inflexion

Définition 41. On dit que la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse x_0 si la courbe y traverse sa tangente.

Théorème 42. Si f est deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et si f'' *s'annule en changeant de signe en* x_0 alors le point de la courbe d'abscisse x_0 est un **un point d'inflexion**.

Exemple 43. Reprenons l'exemple précédent $f : x \mapsto x^3 - 3x^2$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction polynôme.
On a $f'(x) = 6x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$
$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes, f'' s'annule en 1 en changeant de signe; donc le point $(1, -2)$ est un point d'inflexion de la courbe.

Inégalité des accroissements finis

Nous admettons le théorème de l'inégalité des accroissements finis et nous donnons ici les deux formes.

Première forme

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.
Alors pour tous a et b de I $(b < a)$ on a :$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Deuxième forme

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe un réel M tel que : $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$.
Alors pour tous a et b de I on a :$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

Exercice 44. Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\sin x$

Démontrer que $\forall x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$

Solution. La fonction f est dérivable sur $I=\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ et $\forall \in I$ on a : $f'(x)=\cos x$

Or $\forall x \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1$ donc pour $a=0$ et $b=x\in I$,

le T.I.A.F donne : $-1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x-0) \leq \sin x - \sin 0 \leq 1 \times (x-0)$

d'où $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$. □

VI - Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 45 (T.V.I)**.** Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a\,,\,b]$.
Pour tout nombre réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel $\alpha \in [a\,,\,b]$ tel que $f(\alpha)=\beta$.

Conséquence 1

Si f une fonction **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $[a\,,\,b]$ alors pour tout nombre réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** un réel $\alpha \in [a\,,\,b]$ tel que $f(\alpha)=\beta$.

Conséquence 2

a, b, c et d désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $]a\,,\,b[$ telle que :

$$\lim_{x\to a} f(x)=c \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} f(x)=d$$

Alors pour tout nombre réel β compris entre c et d, l'équation $f(x)=\beta$ admet une solution unique $\alpha \in\,]a\,,\,b[$.

Exercice 46. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3+x+1$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.
   En déduire que $\alpha \in\,]-1\,,\,0[$
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,01$.

Solution. 1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + x + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans sur $\mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après la conséquence du T.V.I il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
De plus $f(-1)f(0) = -1 \times 1 < 0$ donc

$$f(-1) < 0 < f(0)$$

$$\Leftrightarrow f(-1) < f(\alpha) < f(0)$$

$$\Leftrightarrow -1 < \alpha < 0 \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante.}$$

3. Encadrement de α d'amplitude $0,01$ par **la méthode du balayage** .
· Recherchons d"abord un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
Calculons de proche en proche les images par f des nombres décimaux d'ordre 1 de l'intervalle $[-1\ ,\ 0[$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$					

On obtient $-0,7 < \alpha < -0,6$

· Recherchons ensuite un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
Calculons de proche en proche les images par f des nombres décimaux d'ordre 2 de l'intervalle $]-0,7\ ,\ -0,6[$ jusqu'à ce qu'on observe un changement de signe.

x	$-0,69$	$-0,68$	$-0,67$	$-0,66$	$-0,65$	$-0,64$	$-0,63$	$-0,62$	$-0,61$
$f(x)$	$-$	$+$							

On obtient $-0,69 < \alpha < -0,68$

□

Conséquence 3

Si f est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle $[a\ ,\ b]$ et si $f(a)f(b) < 0$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a\ ,\ b]$.

> *Remarque* 47. Pour montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle I; on pose $g(x) = f(x) - x$ et on applique le T.V.I à la fonction g sur l'intervalle I.

Exemple 48. Montrons que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α telle que $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

Réponse

Remarquons que $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$

Posons la fonction $f(x) = \cos x - x$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ comme somme de deux fonctions dérivables.

Pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$; donc f est strictement décroissante.

De plus $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} > 0$ et $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$.

Donc f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

et $f(\frac{\pi}{6})f(\frac{\pi}{4}) < 0$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

VII - Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Théorème 49 (Théorème de la bijection)**.** Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I; alors f réalise une bijection de I vers l'intervalle $f(I)$.

En plus sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et a le même sens de variation que f.

Les courbes représentatives de f et f^{-1}, dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice du repère).

· Si de plus f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} dérivable sur $f(I)$ et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall y \in f(I)$$

Remarque 50. Posons $f(a) = b$

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Attention

Si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ ou n'existe pas alors f^{-1} n'est pas dérivable en b.

Exercice 51. Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x^2 + 4x + 2$.

1. Etablir le tableau de variations de f.
2. (a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Montrer que g réalise une

bijection de $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ vers un intervalle J à préciser.

(b) Justifier que g^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $(g^{-1})'(2)$.

Solution. 1. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 8x + 4\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 + 4x + 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2 + 4x + 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2 = +\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) g est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ donc réalise une bijection $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ de vers $g(\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[)$

Or $g(\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[) = \left[g(-\frac{1}{2})\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[= [1\ ,\ +\infty[$

D'où $\underline{J = [1\ ,\ +\infty[}$.

(b) Pour répondre à cette question, il faut calculer l' antécédent de 2 par g.

$g(x) = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 2 = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = -1$

Le seul antécédent dans $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$ est 0.

Or g est dérivable en 0 et $g'(0) = f'(0) = 4 \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable en 2.

On a $(g^{-1})'(2) = \dfrac{1}{g'(0)} = \dfrac{1}{4}$.

□