Nombres complexes

I - Comment écrire un nombre complexe sous forme algébrique ?

Méthode 1
Pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe, on développe en utilisant les propriétés de l'addition et de la multiplication et en tenant compte de ce que $\mathrm{i}^2 = -1$. Dans le cas d'un quotient, si le dénominateur est un nombre complexe, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur pour rendre ce dernier réel.

Exemple 2
Soit f l'application définie dans $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$, donner la forme algébrique de $f(2+3\mathrm{i})$.

Solution. $f(2+3\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2+3\mathrm{i}} = \dfrac{1}{2+3\mathrm{i}} \cdot \dfrac{2-3\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \dfrac{2-3\mathrm{i}}{4+9} = \dfrac{2-3\mathrm{i}}{13} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}\mathrm{i}$ □

Remarque 3
Remarques utiles :

— $\overline{z} = \overline{a+b\mathrm{i}} = a - b\mathrm{i}$

— $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

II - Comment résoudre une équation dans $\mathbb{C}$?

Méthode 4 — Pour résoudre une équation du premier degré d'inconnue z, on isole z et on donne sa forme algébrique.

— Pour résoudre une équation du premier degré d'inconnue z dans laquelle figurent $\overline{z}$, on pose $z = x + y\mathrm{i}$ et on remplace dans l'équation donnée.

— Pour résoudre une équation du second degré d'inconnue z à coefficients réels, on calcule le discriminant Δ, suivant son signe on a alors des solutions réelles ou complexes conjuguées.

Exemple 5
Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $2z + 3\mathrm{i} = 5 - z$
2. $z + 2\overline{z} = 1 + 3\mathrm{i}$
3. $z^2 - 2z + 5 = 0$

Solution.

1. $2z + 3\mathrm{i} = 5 - z \Rightarrow 3z = 5 - 3\mathrm{i} \Rightarrow z = \dfrac{5-3\mathrm{i}}{3} = \dfrac{5}{3} - \mathrm{i}$
2. Posons $z = x + y\mathrm{i}$, alors $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$. L'équation devient : $(x + y\mathrm{i}) + 2(x - y\mathrm{i}) = 1 + 3\mathrm{i}$

$\Rightarrow 3x - yi = 1 + 3i$ Par identification : $3x = 1$ et $-y = 3$, donc $x = \frac{1}{3}$ et $y = -3$. Ainsi $z = \frac{1}{3} - 3i$

3. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ Les solutions sont : $z = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

□

III - Comment déterminer un ensemble de points à partir de la forme algébrique ?

Méthode 6

Il faut savoir « traduire l'énoncé », les remarques suivantes sont souvent utiles pour le faire :

— z est un nombre réel signifie que $\mathrm{Im}(z) = 0$ ou que $z = \overline{z}$ ou que l'image de z est un point de l'axe réel

— z est un nombre imaginaire pur signifie que $\mathrm{Re}(z) = 0$ ou que $z = -\overline{z}$ ou que l'image de z appartient à l'axe imaginaire

Il faut aussi savoir reconnaître les ensembles de points à partir de leur équation :

— $ax + by + c = 0$ pour une droite

— $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ pour le cercle de centre le point Ω d'affixe $a + b$i et de rayon R

Exemple 7

À tout nombre complexe z différent de i, on associe le nombre complexe $Z = \dfrac{z - i}{z + i}$. On pose $z = x + yi$ où x et y sont deux réels.

1. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z.
2. En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan complexe, d'affixe z tels que Z est réel.
3. En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan complexe, d'affixe z tels que Z est imaginaire pur.

Solution. 1. $Z = \dfrac{x + yi - i}{x + yi + i} = \dfrac{x + (y-1)i}{x + (y+1)i}$

En multipliant par le conjugué : $Z = \dfrac{[x + (y-1)i][x - (y+1)i]}{x^2 + (y+1)^2} = \dfrac{x^2 + (y-1)(y+1) + i[x(y-1) - x(y+1)]}{x^2 + (y+1)^2}$

$Z = \dfrac{x^2 + y^2 - 1 - 2xi}{x^2 + (y+1)^2}$

Donc $X = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}$ et $Y = \dfrac{-2x}{x^2 + (y+1)^2}$

2. Z est réel $\Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Donc $\mathscr{E}$ est l'axe imaginaire privé du point d'affixe i.
3. Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$ Donc $\mathscr{F}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe i.

□

IV - Comment utiliser les différentes formes d'un nombre complexe ?

Que faut-il faire ?	Quelle forme faut-il choisir ?	Utilité
Vérifier que a et b sont réels	Forme algébrique $z = a + bi$	Cette forme facilite les calculs de somme et de différence et permet de faire le lien entre les complexes et les coordonnées cartésiennes des points images
Vérifier que r est un réel positif	Forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$	Cette forme établit le lien entre les complexes et la géométrie, elle permet le calcul des distances et des angles
Vérifier que r est positif	Forme exponentielle $z = re^{\mathrm{i}\theta}$	Cette forme facilite les calculs de produit, de quotient et de puissance de nombres complexes

Pour passer d'une forme à l'autre :

$$\text{Forme algébrique} \leftrightarrow \text{Forme trigonométrique/exponentielle} \tag{1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta \tag{3}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Exemple 8
Relier les nombres complexes proposés à leurs différentes formes :

Complexes	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$1+\mathrm{i}$	$1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4}$
$-2+2\mathrm{i}$	$-2+2\mathrm{i}$	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$	$2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}3\pi/4}$

Remarque 9
Cas particuliers à bien savoir :

- $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\pi/2}$
- $-1 = e^{\mathrm{i}\pi}$
- $-\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}3\pi/2}$

- $1 = e^{\mathrm{i}0}$

V - Comment utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes en géométrie ?

Méthode 10
Pour utiliser les nombres complexes en géométrie, il est utile de connaître leur forme trigonométrique, les règles de calcul sur celle-ci et l'interprétation géométrique des modules et arguments suivants :

— $|z_B - z_A| = AB$ (distance)

— $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ (angle orienté)

— $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}$ (rapport de distances)

— $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ signifie que A, B et C sont alignés

Dans ce qui précède A, B et C sont trois points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.

Exemple 11
1. Soit $z_A = 1$, $z_B = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_C = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ les affixes respectives de trois points A, B et C. Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \mathrm{i}| = 2$.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = |z - \mathrm{i}|$.
4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = |z + 1|$.

Solution.
1. $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 1}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{-2 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{(-2+\mathrm{i}\sqrt{3})(-\mathrm{i}\sqrt{3})}{3} = \dfrac{2\mathrm{i}\sqrt{3} + 3}{3} = 1 + \dfrac{2\mathrm{i}\sqrt{3}}{3}$
   Le module est $\sqrt{1 + \frac{4 \cdot 3}{9}} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ et l'argument est $\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.
2. L'ensemble est le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon 2.
3. $|z-1| = |z-\mathrm{i}|$ signifie que M est équidistant des points d'affixes 1 et i. C'est la médiatrice du segment joignant ces deux points.
4. $|z - 1| = |z + 1|$ signifie que M est équidistant des points d'affixes 1 et -1. C'est l'axe imaginaire.

$\square$

VI - Comment préciser la position relative de trois points ?

Méthode 12

Dans le plan complexe, z_A, z_B et z_C sont trois nombres complexes distincts, d'images respectives A, B et C. On considère le nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. On a :

— Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$, alors A, B et C sont alignés

— Si $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$, alors $AC = AB$

— Si $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$, alors le triangle ABC est rectangle en A

— Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm\mathrm{i}$, alors le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

Exemple 13

Dans chacun des cas que peut-on dire des points A, B et C?

1. $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 2$
2. $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \mathrm{i}$
3. $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$
4. $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

Solution.

1. Le rapport est réel positif, donc A, B et C sont alignés et $AC = 2AB$.
2. $|\mathrm{i}| = 1$ et $\arg(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$, donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.
3. Le module est 1 et l'argument est $\frac{3\pi}{4}$, donc $AC = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3\pi}{4}$.
4. Le module est 2 et l'argument est $\frac{\pi}{3}$, donc $AC = 2AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$.

□