

Limites

I - Limite d'une fonction composée

Soient a , b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Propriété 1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$

Exemple 2. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)$

La fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)$ est la composée $g \circ f$ où $f : x \mapsto \frac{\pi x}{2x+1}$ et $g : x \mapsto \cos x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) = 0$$

Remarque 3. En pratique pour calculer $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))$ on peut faire un changement de variable en posant par exemple $X = f(x)$ et la limite devient $\lim_{X \rightarrow b} g(X)$.

L'objectif du changement de variable dans un calcul de limites lorsqu'on est en présence d'une forme indéterminée (FI), est de se ramener à une limite connue (limite usuelle ou limite déjà calculée)

Exemple 4. Pour calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

On peut poser $X = \frac{\pi}{x}$ et la limite devient :

$$\lim_{X \rightarrow 0} \pi \frac{\sin X}{X} = \pi$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \pi$$

II - Théorèmes de comparaison

Théorème 1 (Minoration et majoration)

Théorème 5. Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Théorème 2 (ou théorème des gendarmes)

Théorème 6. Soient f , g et h trois fonctions et l un réel tels que $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Théorème 3

Théorème 7. Soit f et g deux fonctions et l un réel telles que $|f(x) - l| \leq g(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Utilisation de la dérivée

Théorème 8. Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ (fini ou infini) alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Exemple 9. Pour calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + \cos(2\pi x) - 2}{x - 1}$, on peut procéder comme suit :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + \cos(2\pi x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^5 + \cos(2\pi x))' = \lim_{x \rightarrow 1} 5x^4 - 2\pi \sin(2\pi x) = 5$$