

Éléments de symétrie d'une courbe

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

I - Axe de symétrie

Pour montrer que la droite Δ d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $2a - x \in D_f$ et $f(a - x) = f(x)$
- Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $a - x \in D_f$, $a + x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(a + x)$
- Démontrer que : la fonction $g(x) = f(a - x)$ est paire.

Dans ce cas on peut restreindre l'étude de f à $[a, +\infty[\cap D_f$ et on obtient la courbe complète par symétrie par rapport à la droite Δ .

II - Centre de symétrie

Pour montrer que le point $I(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$
- Démontrer que : $\forall x \in D_f$ on a $a - x \in D_f$, $a + x \in D_f$ et $f(a - x) + f(a + x) = 2b$
- Démontrer que : la fonction $g(x) = f(a - x) + b$ est impaire.

Dans ce cas on peut restreindre l'étude de f à $[a, +\infty[\cap D_f$ et on obtient la courbe complète par symétrie par rapport à I .

III - Fonction périodique

Définition 1. Une fonction f est dite **périodique de période t** (ou t -périodique) ssi :

- t est non nul,
- pour tout $x \in D_f$, $x + t$ et $x - t$ sont dans D_f et $f(x + t) = f(x)$.

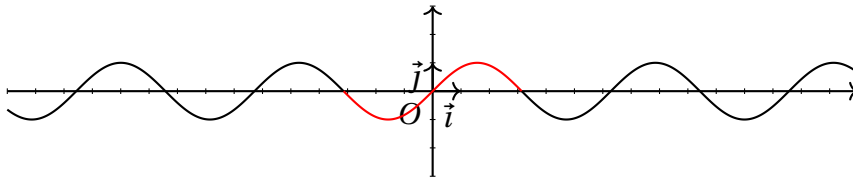
On dit que **t est une période de f** , et la plus petite période strictement positive est **la période de f** . En général la période est notée T .

Pour tout x de D_f et tout **entier relatif** k , $f(x + kT) = f(x)$.

Conséquences

Pour représenter graphiquement une fonction f de période T , il suffit de :

- choisir un intervalle I de longueur T inclus dans D_f ;
- tracer (en rouge) la partie $\mathcal{C}$ de la courbe de f restreinte à cet intervalle I ;
- translater la partie $\mathcal{C}$ par les translations de vecteurs $(kT)\vec{i}$ avec k entier relatif.



Cas des fonctions trigonométriques

- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π c'est à dire : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π c'est à dire : $\tan(x + \pi) = \tan x$

Cas général :

Les fonctions $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$ ont pour période $T = \frac{2\pi}{|a|}$

La fonction $x \mapsto \tan(ax + b)$ a pour période $T = \frac{\pi}{|a|}$

Réduction de domaine d'étude

- Si f est T-périodique alors on peut restreindre le domaine d'étude à tout domaine du type $[a, a + T] \cap D_f$ pour tout réel a , ainsi on obtient la courbe complète de f sur ce domaine.
- Si f est T-périodique et paire (resp. impaire) alors on peut restreindre le domaine d'étude au domaine $\left[0, \frac{T}{2}\right] \cap D_f$ ainsi on obtient la courbe complète sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \cap D_f$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (resp. par symétrie par rapport à O origine du repère).
- Si f est T-périodique et $\mathcal{C}$ admet un axe de symétrie Δ (resp. un centre de symétrie I) alors on peut restreindre le domaine d'étude au domaine $\left[a, a + \frac{T}{2}\right] \cap D_f$ ou au domaine $\left[a - \frac{T}{2}, a\right] \cap D_f$ ainsi on obtient la courbe complète sur $\left[a - \frac{T}{2}, a + \frac{T}{2}\right] \cap D_f$ par symétrie par rapport à l'axe Δ (resp. par symétrie par rapport un point I).

Exercice 2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

1. Déterminer D_f et puis montrer que f est de période π .
2. Montrer que le point $A(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. En déduire un domaine simple pour l'étude de f

Solution. 1. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \sin x + \cos x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin x \neq -\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x \neq \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Montrons que π est la période de f .

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x + \pi \neq \frac{7\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x + \pi \in D_f.$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x - \pi \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x - \pi \in D_f.$$

$$f(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\sin(x + \pi) + \cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\sin x - \cos x} = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = f(x)$$

$$2. \quad 2a - x = -\frac{\pi}{2} - x$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - x \neq -\frac{7\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - x \in D_f \\ \Leftrightarrow 2a - x \in D_f$$

$$f(2a - x) + f(x) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(-\frac{\pi}{2} - x) + \cos(-\frac{\pi}{2} - x)} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f(2a - x) + f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = 1$$

Donc le point A est bien un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Proposons un d'étude de f .

f est de période $T = \pi$ et l'abscisse du centre de symétrie est $a = -\frac{\pi}{4}$, on peut appliquer la

formule $\left[a, a + \frac{T}{2} \right] \cap D_f$

$$\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right] \cap D_f = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cap D_f = \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$$

Conclusion : on peut étudier f sur $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$ puis obtenir la courbe complète par symétrie par rapport à A sur $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$.

□