Similitudes directes plan complexe

Exercice 1. Déterminer en justifiant la nature des transformations du plan suivantes :

1. $z' = z + 1 - 2i$
2. $z' = iz + 1$
3. $z' = -3z - 1 + i$
4. $z' = (1 + i)z - 1 + i$

Exercice 2. Déterminer l'écriture complexe des transformations suivantes :

1. Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2 + 3i$.
2. Rotation de centre A d'affixe $-i$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
3. Homothétie de centre A d'affixe $-1 + i$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
4. Similitude directe de centre A d'affixe -2 , de rapport 2 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe, puis la nature et les éléments caractéristiques des transformations $s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$.

1. $s_1 : z' = 2iz + 1 - 2i$ et $s_2 : z' = \frac{1}{2}iz + 1 - \frac{1}{2}i$
2. $s_1 : z' = (1 - i)z + 1 + i$ et $s_2 : z' = -2z$

Exercice 4. Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture complexe de f .
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 5. Dans le plan complexe, on considère les points A et C d'affixes respectives $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$, et l'application f définie par $z' = e^{2i\frac{\pi}{3}}z$.

1. Déterminer les images des points A et C par f .
2. En déduire l'équation de l'image de la droite (AC) .

Exercice 6. Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, Ω est le point de coordonnées $(2, 1)$, S est la similitude de centre Ω , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, (D) est la droite $3x + 3y - 4 =$

0, (C) le cercle de centre O et de rayon 3.

1. Soit $M(x, y)$ un point et $M'(x', y')$ son image par S . Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
2. En déduire l'équation de (D') image de (D) par S .
3. En déduire l'équation de C' image de C par S .

Exercice 7. Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = 3iz - 9 - 3i$. Déterminer l'image par S :

1. Du cercle de centre $K(1 - 3i)$ et de rayon 1.
2. De la droite (D) d'équation $x = 1$.

Exercice 8. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On donne $Z_A = -1 - i$, $Z_B = 2 - i$, $Z_C = -1 + 2i$. On considère la similitude S de centre B qui transforme A en C .

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S .
2. Donner l'écriture complexe de S .
3. $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC , déterminer les caractéristiques de $\mathcal{C}'$ image par S .

Exercice 9. On considère les points $Z_A = 2i$, $Z_B = -\sqrt{3} + 2i$, $Z_C = -2\sqrt{3} - i$.

1. Donner l'écriture complexe de la similitude directe qui transforme A en B et B en C .
2. Déterminer l'affixe du centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

Exercice 10. A et B ont pour affixes $Z_A = 3i$ et $Z_B = 4 + i$. r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $z' = iz + 3 + 3i$.
2. Montrer que $Z_C = 2 + 7i$ si $r(B) = C$.
3. Montrer que ABC est rectangle isocèle en A .
4. Soit D le milieu de $[AC]$, $h(z) = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}i$.
 - (a) Montrer que $h(C) = D$.
 - (b) Exprimer $z' - 3i$ en fonction de $z - 3i$ et en déduire la nature de h .
5. S est la similitude de centre A , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donner son écriture complexe.

Exercice 11. Soit $a = -1 - i$ et (z_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 0, & z_1 = i \\ z_{n+1} = (1 - a)z_n + az_{n-1} \end{cases}$$

1. Déterminer z_2 et z_3 .
2. Soit $u_n = z_{n+1} - z_n$
 - (a) Déterminer u_0 et u_1 .
 - (b) Montrer que (u_n) est géométrique de raison $-a$.
 - (c) Exprimer u_n en fonction de n et a .
3. Montrer que $S_n = z_n$ avec $S_n = u_0 + \dots + u_{n-1}$, puis que $z_n = -1 + (1 + i)^n$.
4.
 - (a) Déterminer le module et un argument de a .
 - (b) Donner la forme algébrique de z_{19} .

Exercice 12. Soit $T(z) = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$.

1.
 - (a) Montrer que T admet un point invariant J .
 - (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T .
 - (c) Exprimer $\overrightarrow{JM'}$ en fonction de $\overrightarrow{JM}$ et donner l'angle $(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JM'})$.
2. Soit I d'affixe -1 .
 - (a) Déterminer $I' = T(I)$.
 - (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des z tels que $|z + 1| = |iz + 1|$.
 - (c) Déterminer $\mathcal{C}$ des z tels que $|(1 + i)z - 1 + i| = |1 - i|$.
 - (d) Déterminer $\mathcal{D}' = T(\mathcal{D})$, $\mathcal{C}' = T(\mathcal{C})$.
3. Soit $S(z) = \frac{1}{2}z - i$.
 - (a) Déterminer le rapport et l'angle de $T \circ S$.
 - (b) En déduire la nature de $T \circ S$.
 - (c) Donner l'écriture complexe de $T \circ S$.
4.
 - (a) Montrer que T^3 est une homothétie.
 - (b) Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels T^n est une homothétie.

Exercice 13. Soit $T(z) = a^2z + b$ et le point $I(2i)$.

1. T est une translation de vecteur $\vec{U}(0, 2)$.
2. T est une homothétie de rapport -4 et de centre I .
3. T est une rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
4. T est une similitude directe transformant $A(-1, 0)$ en I et de centre $B(-1, 1)$.