Etude de fonctions ln

Problèmes sur le logarithme népérien

PROBLÈME 1
Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2x - 2 - x\ln(x)$

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que : $\alpha \in]0\,,\, \mathrm{e}[$ et $\beta \in\ ]\mathrm{e}\,,\, +\infty[$.
   Préciser la valeur exacte de α et établir que $4,5 < \beta < 5$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,,\, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(\ln(x))^2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Étudier la continuité de f en 1.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 1.
2. (a) Montrer que pour $x \neq 1$ et $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x(x-1)^2} \times g(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que $f(\beta) = \dfrac{4(\beta-1)}{\beta^2}$.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 1.
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0\,,\, 1]$.
   (a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} puis établir le tableau de variation de h^{-1}.
6. Tracer $\mathscr{C}$ et celle de h^{-1} dans le même repère.

PROBLÈME 2
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Partie A

1. Montrer que $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ et calculer les limites de f aux bornes de D_f .
   (a) Étudier la continuité de f en 0.

   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
   Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Étudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$

Partie B

1. Soit $h(x) = \ln(x) + x + 1$
   (a) Dresser le tableau de variations de h.
   (b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α et montrer que $0,27 < \alpha < 0,28$.
   (c) En déduire le signe de $h(x)$.
2. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$ en déduire le signe de $f'(x)$.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$
   (c) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.
   Établir le tableau de variations de f.
   (d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un RON.

Partie C

Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I = [\alpha\ ,\ +\infty[$.

1. Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère précèdent.