Etude de fonctions ln et expo

Fonctions de raccordement

PROBLÈME 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x-1-\dfrac{1}{\ln(x-2)} & \text{si } x>2 \\ x-\mathrm{e}^{\frac{x-2}{2}} & \text{si } x\leq 2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{3\}$.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la nature des branches infinies de $\mathscr{C}_f$.
4. Montrer que f est continue en 2.
5. Étudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter graphiquement les résultats.
6. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour $x<2$ et pour $x>2$.
7. Déterminer le sens de variations de f puis établir son tableau de variations.
8. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0\ ,\ 1]$. En déduire que $0,4<\alpha<0,5$.
9. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.
10. Une population d'insectes se développe initialement dans un environnement aux ressources limitées, puis prolifère une fois que les conditions deviennent favorables. On modélise l'évolution de cette population en fonction du temps (en semaines) par la fonction : $F(x)=5+\dfrac{x^2}{2}-2\mathrm{e}^{\frac{x-2}{2}}$ où $F(x)$ représente le nombre d'individus (en milliers) au temps $x\in[0,\ 2]$.
    (a) Calculer $F(0)$ et interpréter ce résultat.
    (b) Calculer la population minimale au cours de ces deux premières semaines.

PROBLÈME 2

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x)=1-x\mathrm{e}^{-x}$

(a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
(b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} \ln|x| & \text{si } x<-1 \\ (x+1)(1+\mathrm{e}^{-x}) & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$$

(a) Déterminer D_f

(b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1.
(c) Dresser le tableau de variations de f.
(d) Montrer que la droite $\Delta : y = x + 1$ une asymptote $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
(e) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ et Δ .
(f) Montrer qu'il existe un unique point A de $\mathscr{C}_f$ où la tangente (T) est parallèle à Δ.
(g) Tracer Δ , (T) et $\mathscr{C}_f$.

PROBLÈME 3

PARTIE A

Soit u la fonction définie par : $u(x) = \dfrac{1+x}{2+x} + \ln x$

(a) Dresser le tableau de variations de u .
(b) En déduire que la fonction u s'annule pour un unique réel α puis vérifier que $0,54 < \alpha < 0,55$
(c) Donner le signe de $u(x)$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 \ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} + x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d 'unité 4 cm.

(a) Déterminer les limites aux bornes de D_f .
(b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
(c) Étudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.
(d)
   i. Pour $x > 0$, calculer $f^{'}(x)$ .Vérifier que $f^{'}(x)$ et $-u(x)$ ont le même signe .
   ii. Pour $x < 0$, donner le signe de $f^{'}(x)$.
   iii. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2+\alpha}$
   iv. Établir le tableau de variations de f.
   v. Tracer la courbe C .On prend $\alpha = 0,55$
(e) Soit h la restriction de f à $]-\infty, 0]$.
   i. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ vers un intervalle J à préciser .
   ii. Tracer la courbe de h^{-1} dans le repère.

PROBLÈME 4

(a) Soit $g(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}, \quad x \leq 0$
Étudier les variations de g.
En déduire le signe de g sur $]-\infty\,,\,0]$.

(b) Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x(1+e^{2-x}) & \text{si } x \leq 0 \\ \ln|x^2-1| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

i. Déterminer l'ensemble de définition de f.
ii. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
iii. Étudier les variations de f.
iv. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

(c) Soit h la restriction de f à $[0\,,\,1]$.
Montrer que h admet une bijection réciproque dont on dressera le tableau de variation.

(d) Expliciter h^{-1}

(e) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{h^{-1}}$.

PROBLÈME 5

PARTIE A

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x < 0 \\ (2+x)e^{-x} & \text{si} x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(b) i. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f. Préciser les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.
ii. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(x+2)]$ .Interpréter graphiquement le résultat .

(c) i. Étudier la continuité de f en 0.
ii. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$.
iii. En déduire que f est dérivable à droite et à gauche en 0 . f est - elle dérivable en 0 ?

(d) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$ puis pour $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[$.

(e) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$ puis pour $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[$.

(f) Dresser le tableau de variations de f .

(g) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]-3,-2[$

(h) Tracer (C) dans le repère.On mettra en évidence l'allure de (C) au point d'abscisse 0 et les droites asymptotes.

(i) Soit g la restriction de f à $]-\infty,-1[$
i. Montrer que g définit une bijection de $]-\infty,-1[$ sur un intervalle J à préciser.

ii. On note g^{-1} sa bijection réciproque.
Représenter la courbe de g^{-1} dans le repère précèdent.

PROBLÈME 6

PARTIE A

(a) Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $4e^{2x} - 5e^{x} + 1$.

(b) Soit : $g(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$.

i. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.

ii. Étudier ses variations et dresser son tableau de variations.

iii. En déduire son signe.

PARTIE B

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{e^{x}}{2e^{x} - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x}\,\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

(a) i. Déterminer D_f le domaine de définition de f.

ii. Calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies de $\mathscr{C}$.

iii. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'asymptote oblique dans $]-\infty, 0]$.

(b) i. Étudier la continuité de f en 0.

ii. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

(c) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f.

(d) Construire dans le repère les asymptotes, la courbe $\mathscr{C}$ et les demi-tangentes.
On remarquera que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.