Limites de fonctions composées

a, b et c désignent soit un réel soit $\pm\infty$.

Rappel: Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ alors par composée $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$

Exercice 1. Justifier les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x-1}{x^2} \right)^4 = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} = 2$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x - 2}{x - 4}\right) = -1$

Exercice 2. Etudier les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x - 3}$
2. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{\frac{1+x}{4-x^2}}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x - 2}{6x - 4}\right)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)^5$

Exercice 3. Une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tel que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

1. Interpréter graphiquement ces limites.
2. Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x^2 + 1}{2x - 1}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{2 - x^2}{2 + x^2}\right)$

Exercice 4. Une fonction f a pour tableau de variations celui donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$		
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\parallel$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(2 + \frac{2}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + x}{f(|x|) - 1}$

Exercice 5. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(1) = 0$ et $f'(1) = -1$. $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = 3$ en $-\infty$ et une asymptote d'équation $y = x + 4$ en $+\infty$.

1. Calculer les limites suivantes.

$$\begin{aligned} & - \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x-1}{x^2}\right) \\ & - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + f(x)} \\ & - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - x + 3} \end{aligned}$$

2. On considère la limite suivante $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

- Justifier qu'il y a une présence de forme indéterminée.
- En posant $X = 1 + \frac{1}{x}$, calculer cette limite.