

Exponentielle

Exercice 1. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $\frac{(e^2)^5}{e^5}$
2. $\sqrt{e^2} \times \frac{1}{e^{-2}}$
3. $\frac{e^{-3} \times e^2}{e^7}$
4. $\frac{1}{1+e} - \frac{e^{-1}}{1+e^{-1}}$

Exercice 2. Simplifier chacune des expressions.

1. $e^{-2x} \times e^{2x}$
2. $(e^x)^3 \times e^{-2x}$
3. $e^{2x+1} \times e^{1-x}$
4. $\frac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$
5. $\frac{e^{x+2}}{e^{-x+2}}$
6. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$
7. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$
8. $(e^x + e^{-x})^2 - 1 - e^{-2x}$
9. $\frac{e^{3x} + e^x}{e^{2x} + 1}$

Exercice 3. Démontrer les égalités suivantes.

1. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 2.$
2. $e^{2x} - 5e^x + 4 = (e^x - 1)(e^x - 4)$
3. $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$
4. $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$
5. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^{3x} = 1$
2. $e^{-3x+5} = e^{-2x+5}$
3. $e^{-3x+5} \times e^{x+1} = e^5$
4. $e^{-3x+5} = e^2$
5. $e^x + 4 = 0$
6. $e^{2x-1} = 16$
7. $e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$
8. $e^{(x+1)(2x+1)} = 1$
9. $e^{x^2+3x+4} = e^2$
10. $e^{x^2+x+1} = e^{3x+5}$
11. $e^{x^2+1} \times e^{2x} = e^{2x^2}$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$
2. $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
3. $e^{2x} - 5e^x = 14$
4. $e^{2x} + e^x = 2$
5. $e^x + e^{-x} = 2$
6. $e^{-x} + 2e^x = 3$
7. $e^{-2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$
8. $e^{3x} + 3e^{2x} + 2e^x = 0$
9. $e^{3x} - e^{2x} - 2e^x = 0$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{2x} > 3$
2. $e^{-2x} \leq 3$
3. $e^{-2x} \leq e^{x+5}$
4. $e^{x^2} > e^9$
5. $e^{x^2} > e^{3x+2}$
6. $(e^x - 1)(e^x - 2) > 0$
7. $(2e^x - 4)(e^x - 3) < 0$
8. $(e^x + 5)(e^{2x} - 2) > 0$
9. $\frac{e^x - 3}{e^x - 2} \geq 0$

10. $\frac{e^x - 3}{e^x - 2} \geq 2$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{2x} - e^x < 0$
2. $e^{2x} - 5e^x - 14 < 0$
3. $e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0$
4. $e^{2x} - 12e^x + 20 > 0$
5. $-e^{2x} + 11e^x - 30 > 0$
6. $e^{2x} - 25 < 0$

Exercice 8. On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

1. Calculer $P(2)$ puis montrer que :
 $P(x) = (x + 2)(x - 3)(2x - 1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
3. En déduire les solutions des équations suivantes.
 - (a) $2(\ln(x))^3 - 3(\ln(x))^2 - 11 \ln(x) + 6 = 0$.
 - (b) $2e^{3x} - 3e^{2x} - 11e^x + 6 = 0$.

Exercice 9. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 9x^2 - x + 9$.

1. Calculer $P(9)$ en déduire une factorisation de $P(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{e^{2x} + 9e^{-x}}{9e^x + 1} = 1$.

Exercice 10. 1. Développer, réduire et ordonner $P(x) = (x + 2)(x - 3)(x + 1)$

2. Résoudre $\mathbb{R}$, $P(x) = 0$ et $P(x) \leq 0$.
3. En déduire la résolution des équations suivantes.
 - (a) $(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 6 = 0$
 - (b) $e^{3x} - 7e^x - 6 = 0$.

Exercice 11. 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

2. En déduire la résolution des équations suivantes.
 - (a) $(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 2 \ln x = 0$
 - (b) $e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x = 0$.

Exercice 12. On considère le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + 14x + c$ où a , b et c sont des réels.

1. Déterminer a , b et c sachant que $P(0) = -20$, $P(-2) = 0$ et $P(-1) = -24$
2. On pose $P(x) = -2x^3 + 8x^2 + 14x - 20$
 - (a) Factoriser $P(x)$.
 - (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
 - (c) En déduire les solutions des équations suivantes.
 - (d) $-2e^{3x} + 8e^{2x} + 14e^x - 20 = 0$.
 - (e) $-2(\ln(x))^3 + 8(\ln(x))^2 + 14\ln(x) - 20 = 0$.

Exercice 13. Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2e^x - 3e^y = -5 \\ 3e^x + 4e^y = 18 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5e^{-x} - 3e^{-y} = 3 \\ 7e^{-x} + 6e^{-y} = 11 \end{cases}$
4. $\begin{cases} e^x \times e^{2y+2} = 0 \\ e^{x+7} \times e^y = e \end{cases}$
5. $\begin{cases} e^{x-y} = 12 \\ e^{x+y} = \frac{4}{3} \end{cases}$

Exercice 14. 1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 2X - Y = 7 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases}$

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}^2$ des systèmes :

$$\begin{cases} 2e^x - e^y = 7 \\ 3e^x + 4e^y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\ln x - \ln y = 7 \\ 3\ln x + 4\ln x = 5 \end{cases}$$

Exercice 15. Résoudre les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} e^x \times e^y = e^2 \\ xy = -15 \end{cases}$
2. $\begin{cases} e^x \times e^y = e^{10} \\ \ln x + \ln y = \ln 21 \end{cases}$
3. $\begin{cases} e^x - 3\ln y = 11 \\ 2e^x + \ln y = 1 \end{cases}$

$$4. \begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases}$$

Exercice 16. Calculer la dérivée de f dans chaque cas.

1. $f(x) = e^x - x - 1$
2. $f(x) = (x + 5)e^x$
3. $f(x) = x^2 e^x$
4. $f(x) = x e^{2x}$
5. $f(x) = e^x - e^{-x}$
6. $f(x) = e^{x^2 - 6x}$
7. $f(x) = x e^{x^2 - 6x}$
8. $f(x) = e^{\frac{2}{x}}$
9. $f(x) = e^{\frac{x}{x+2}}$
10. $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 2}$
11. $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 2}$
12. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
13. $f(x) = (4e^x - 1)(e^{2x} + 1)$
14. $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - 2e^x}$
15. $f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$

Exercice 17. Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x} + 1)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 1)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x}$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x}$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x + \frac{1}{x} \right)$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-2x}}$

Exercice 18. Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x + 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{2x}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x + 1)e^x$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 - x)$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3e^x}{e^x - 1}$

Etude de fonctions

Exercice 19. Etudier les variations de f dans chaque cas.

1. $f(x) = xe^x$
2. $f(x) = \frac{x}{e^x}$
3. $f(x) = x^2 e^x$
4. $f(x) = \frac{e^x}{x}$
5. $f(x) = e^{x+2}$
6. $f(x) = e^{2x-2}$
7. $f(x) = e^{-x^2}$
8. $f(x) = e^{x^2+2x+1}$
9. $f(x) = e^{3-x}$
10. $f(x) = x - e^x$
11. $f(x) = x + e^x$

Exercice 20. Soit $f(x) = x - \frac{e^x}{e^x + 2}$, pour tout réel x .

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 2)^2}$
3. En déduire le tableau de variation de f .
4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

5. Montrer que la droite (D') d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 21. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$. En déduire le tableau de variations de f .
3. Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie à la courbe de f .

Exercice 22. Soit la fonction f définie par $f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 3x + 2$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Que représente l'axe des abscisses pour la courbe de f ?
5. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 23. Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} - e^{-2x} - 4x$

1. Etudier la parité de f
2. Dans la suite on étudie f sur $[0, +\infty[$.
 - (a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
 - (b) Montrer que $f'(x) = 2(e^x - e^{-x})^2$.
 - (c) Dresser le tableau de variations de f .
 - (d) Représenter la courbe de f

Exercice 24. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{e^x + 2}$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser les asymptotes à la courbe de f .
2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f .
3. Montrer que le point $I(\ln 2, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie à la courbe de f .
4. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
5. Déterminer les coordonnées du point A intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.

Exercice 25. On considère la fonction f définie par : $f(x) = xe^{-x}$

1. Déterminer le domaine de définition E de f puis les limites aux bornes de E.

2. a. Montrer que la fonction dérivée de f est telle que $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
b. Dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe en $-\infty$.
4. Tracer la courbe.

Exercice 26. Soit la fonction f définie par : $f(x) = (1-x)e^x + 1$

1. Déterminer le domaine de définition de f puis les limites aux bornes de ce domaine. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
2. Calculer la fonction dérivée de f , étudier son signe puis dresser son tableau de variations de f .
3. Déterminer l'équation de la tangente au point où la courbe coupe l'axe des ordonnées.
4. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe en $-\infty$.
5. Tracer la courbe.

Exercice 27. Soit la fonction f définie par : $f(x) = e^{x^2-2x}$

1. Déterminer le domaine de définition de f puis les limites aux bornes.
2. Calculer la fonction dérivée de f , étudier son signe puis dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer l'équation de la tangente aux points d'abscisse 0 et 2.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

Exercice 28. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
Calculer la limite de f en $-\infty$.
En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe en $-\infty$
Calculer la limite de f en $+\infty$. En déduire l'équation d'une deuxième asymptote à la courbe en $+\infty$.
2. Calculer la fonction dérivée de f , étudier son signe puis dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer l'équation de la tangente au point où la courbe coupe l'axe des ordonnées.
4. Montrer que pour tout x réel, $f(-x) = -f(x)$.
Que peut on en déduire pour la fonction f et pour sa courbe représentative?

Exercice 29. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

1. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{e^x - 1}$
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et étudier les limites aux bornes de cet ensemble de définition.
3. (a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f .
 (b) Etudier le sens de variations de la fonction f .
 (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
4. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité: 2cm)
 - (a) Montrer que le point $A(0; \frac{3}{2})$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.
 - (b) Tracer $\mathcal{C}$.

Exercice 30. Soit la fonction f définie par : $f(x) = x + \ln(2 - e^x)$

1. Résoudre l'inéquation $2 - e^x > 0$.
 En déduire le domaine de définition Df de f .
2. Etudier les limites $-\infty$ et en $\ln 2$ de la fonction f .
3. Calculer f' puis établir le tableau de variation de f .
4. (a) Montrer que pour tout $x \in Df$,

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln \left(1 - \frac{e^x}{2} \right).$$
 (b) En déduire que la droite $y = x + \ln 2$ est une asymptote en $-\infty$ à la courbe de f .
 (c) Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité: 1cm)