Fonction ln (TS2)

Initiation ln

Exercice 1
Ecrire plus simplement en un seul logarithme, chacune des expressions suivantes.

$A = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 5 \quad B = 2\ln 2 + 2\ln 5 + 1$

$C = \frac{1}{2}\ln 3 + \ln e^2 - \ln \frac{2}{e} + 3 \quad D = \ln\left(3+\sqrt{5}\right) + \ln\left(3-\sqrt{5}\right)$

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $\ln(x-1) = \ln(2-x)$

2) $\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2\ln 2$

3) $\ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln(5x-9)$

4) $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = 0$

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $\ln(x-4) \leq \ln(10-x)$

3) $\ln(x-1) + \ln(x+2) \geq \ln(4x-8)$

4) $\ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) > 0$

Exercice 4
On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.
2. En déduire les solutions de l'équation et l' inéquation suivantes.

   a) $2\ln^3 x - 9\ln^2 x + \ln(x) + 12 = 0$.

   b) $\ln(2x-3) + 2\ln(x-2) \leq \ln(-2x^2 + 19x - 24)$

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} \ln(x+2) + 3\ln(y-1) = 4 \\ 2\ln(x+2) - \ln(y-1) = 2 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x - y = \frac{3}{2} \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases}$

Exercice 6

Déterminer les limites de f aux bornes de D_f puis calculer sa fonction dérivée f'.

1) $f(x) = \dfrac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{x+\ln(x)}{2x}$ 4) $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 7

Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \sqrt{3-\ln(x)}$ 2) $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 3$

3) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$ 4) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

Exercice 8

Etudier le signe des expressions suivantes :

$A(x) = \ln x\left(\ln x + 1\right)$ $B(x) = 1 - \ln(1-x)$

$C(x) = 2\ln^2(x) - \ln(x) - 1$ $D(x) = \ln(x) - x + 1$

Exercice 9

Soit $f(x) = x - 1 + \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

1. Déterminer les limites aux bornes de D_f.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que le point I$(0;1)$ est à la fois centre de symétrie et point d'inflexion de la courbe de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
5. Représenter f.

Exercice 10

Soit $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$.

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur D_f.
2. Soit g la restriction de f à $I =]2,3[$.
   Montrer que g est une bijection de $]2,3[$ sur un intervalle J à déterminer.

Soit $F(x) = (x-1)\ln(x-1) - (3-x)\ln(3-x) - 2x$

1. Montrer que F est une primitive sur I de f.
2. Etudier les variations de F et tracer C_F.