Fonction expo (TS2)

Initiation expo

Exercice 1 1. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A = \frac{e^{3+\ln x^2}}{2x} \qquad B = \frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{2x}+1}$$

2. Prouver que pour tout réel x :

a) $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

b) $\ln\left(1+e^{x}\right) = x + \ln\left(1+e^{-x}\right)$

Exercice 2
On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $P(x) \leq 0$.
2. En déduire les solutions de l'équation et l' inéquation suivantes.

a) $2e^{3x} - 9e^{2x} + e^{x} + 12 = 0$ **b)** $\dfrac{e^{2x}\left(2e^{x}-9\right)}{e^{x}+12} \leq -1.$

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a) $\left\{\begin{array}{l} 2e^{x}+3e^{1+y} = 13 \\ e^{x}+e^{1+y} = 5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} xy = -15 \\ e^{x}\times e^{y} = e^{2} \end{array}\right.$

Exercice 4
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1) $f(x) = (x^2-5x+1)e^{3x-1}$ 2) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x^2}$ 3) $f(x) = \ln\left(1+e^{x}\right)$
4) $f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ 5) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{x}-1}{x+e^{x}}\right)$ 6) $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2-x}\right)$

Exercice 5
Etudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{x}-x^2-x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-2x}}{3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x}+3x$
5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(2-e^{-x})}{x}$ 6) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (x+2)e^{-x}$

Exercice 6
Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x} - 4x$ 2) $f(x) = (x^2 - 5x + 7)\mathrm{e}^{2x}$ 3) $f(x) = x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}$
4) $f(x) = x - \mathrm{e}^{\frac{x-2}{2}}$ 5) $f(x) = (x-1)(2 - \mathrm{e}^{-x})$

Exercice 7
Soit $\mathrm{f}(x) = 1 - \dfrac{4\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe.

1. Démontrer que pour tout x, $\mathrm{f}(-x) = \mathrm{f}(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{f}(x)$. Interpréter.
3. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{f}'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)}{(\mathrm{e}^{2x} + 1)^2}$
4. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
5. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point A d'abscisse a positive. Montrer que $1{,}31 < a < 1{,}32$. Donner une allure de $\mathscr{C}$ dans le repère.
6. Donner le signe de $\mathrm{f}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8
Soit $f(x) = \begin{cases} -x + 7 - 4\mathrm{e}^x & \text{si } x \leq 0 \\ x + 3 - x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. (a) Etudier la continuité de f en 0.
   (b) Etudier la dérivabilité de f en 0 . Interpréter le résultat graphiquement.
   (c) Ecrire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse e.
2. Déterminer les limites aux bornes de Df.
3. Etudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.
4. Établir le tableau de variations de f.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha > 0$.
6. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 9
On considère la suite (U_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel n par :
$\begin{cases} U_0 & = & 0 \\ U_{n+1} & = & \ln\left(1 + \mathrm{e}^{U_n}\right) \end{cases}$

1. Calculer U_3.
2. Exprimer U_n en fonction de U_{n+1}.
3. Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = \mathrm{e}^{U_n}$, $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le

premier terme.

(b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

(c) Etudier la convergence de la suite (U_n) et préciser sa limite.