Fonctions numériques(TS2)

Exercice 1

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Étudier le sens de variations de f puis établir son tableau de variations.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f admet sur $[2\,,\,+\infty[$ une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
4. Montre que le point $(1,2)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 4}{x^2 - 4}$

On note par $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. (a) Déterminer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (b) Soit l'asymptote oblique Δ de $\mathscr{C}_f$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
2. Étudier le sens de variations de f puis établir son tableau de variations.
3. Soit I le point d'intersection de Δ et $\mathscr{C}_f$.
   Montrer que I est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
4. Tracer $\mathscr{C}_f$ (unité 1cm).

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$.

1. Déterminer Df puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. (a) Montrer que sa dérivée est définie par : $f'(x) = \dfrac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\left(2 + \sqrt{x}\right)^2}$.
   (b) Résoudre l'équation : $X^2 + 4X - 1 = 0$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur Df.
   (c) Dresser alors le tableau de variations de la fonction f sur Df.
   On veillera notamment à calculer la valeur exacte de l'extremum de f.
3. Déterminer la branche infinie de la courbe de f puis construire cette courbe (unité 8cm).

Exercice 4
Soit la fonction f définie par : $f(x) = (1-x)\sqrt{|1-x^2|}$
$\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1 et -1.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
   Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer les branches infinies de la courbe de f.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le repère.

Exercice 5
Partie A
Soit la fonction P définie par $P(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

1. Etablir le tableau de variations de P.
2. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   Vérifier que $\alpha \in \left[1,45\ ;\ 1,46\right]$.
3. En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B
Soit la fonction f définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$. $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Etudier les limites de f aux bornes de Df.
2. Calculer $f'(x)$ en fonction de $P(x)$.
3. En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha$.
5. Montrer que la droite d'équation $\mathscr{D} : y = \dfrac{x}{4}$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.
6. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.
7. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

Exercice 6
Partie A
Soit la fonction g définie par : $g(x) = -x\sqrt{1+x^2} - 1$.

1. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la valeur exacte de α.
4. En déduire que :
   si $\alpha < 0$ alors $g(x) > 0$ et si $\alpha \geq 0$ alors $g(x) \leq 0$

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$f(x) = -\dfrac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$.

1. Calculer les limites aux bornes de Df.
2. Déterminer la nature des branches infinies de $\mathscr{C}$.
3. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3-\alpha^4}{3\alpha}$.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
7. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (T).
8. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

Exercice 7

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x+2-\dfrac{2x}{x^2+1} & \text{si } x \leq 1 \\ x-1-3\sqrt{x^2-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Calculer les limites aux bornes de D_f.
2. Etudier la continuité de f en 1.
3. Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
4. (a) Déterminer les asymptotes de $\mathscr{C}_f$.
   (b) Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.
5. Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable en justifiant la dérivabilité de f sur chacun de ces intervalles puis dresser son tableau de variations.
6. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.
7. (a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty,\ 1]$.
   Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
   (b) Tracer $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère.

Exercice 8

Soit $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$.

1. Déterminer D_f puis justifier le choix de $I = [0,\ \pi]$ comme intervalle d'étude de f.
2. Montrer que : $f'(x) = 4(1-2\sin 2x)\cos 2x$, $x \in I$.
3. Résoudre dans I l'équation $f'(x) = 0$.

4. En déduire le tableau de variations de f.
5. Construire $\mathscr{C}_f$ sur $[0,\ \pi]$.

Exercice 9

Soit $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que f est une fonction impaire et periodique de période 2π.
3. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet la droite $x = \dfrac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Construire $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi,\ \pi]$.