Équations différentielles

Restitution des connaissances

Exercice 1
Compléter les phrases ci-dessous.

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sont les fonctions du type $\cdots$
2. Une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants est une équation du type $\cdots$
3. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions de la forme $\cdots$
4. L'équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ est $\cdots$

Exercice 2
Répondre par vrai ou faux.

1. L'équation différentielle $-y' = y$ a pour solution générale :
   a) $f(x) = K\mathrm{e}^{x}$ **b)** $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ **c)** $f(x) = K\mathrm{e}^{-x}$
2. L'équation différentielle $y'' = -y$ a pour solution générale :
   a) $f(x) = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x}$ **b)** $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ **c)** $f(x) = \mathrm{e}^{x}(A\cos x + B\sin x)$
3. La fonction $x \mapsto 5\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle :
   a) $y' = 2y$ **b)** $y' = -5y$ **c)** $y' = -2y$
4. La fonction $x \mapsto 2 - \mathrm{e}^{4x}$ est solution de l'équation différentielle :
   a) $y' + 4y = 8$ **b)** $y' - 4y = 4$ **a)** $y' - 4y = 8$
5. L'équation différentielle $y'' = -\frac{1}{x^2}$ a pour solution générale :
   a) $f(x) = \ln x + C$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **c)** $f(x) = -K\ln x$

Applications de règles ou de méthodes

Exercice 3
Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $y' = 4y$ **b)** $y' = \frac{3}{2}y$
c) $y' + y = 0$ **d)** $3y' - y = 0$

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $y'' + 6y' + 9y = 0$ **b)** $y'' - 4y' - 5y = 0$
c) $3y'' + 10y' + 3y = 0$ **d)** $y'' + 7y' = 0$

Exercice 5
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles : **a)** $y' + 4 = 0$ **b)** $y'' = 4$ **c)** $y'' = x$.

Exercice 6 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $3y' + 2y = 0$.

2. Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative admet pour tangente au point d'abscisse 0, la droite d'équation $y = -2x + 3$.

Exercice 7 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $-\frac{1}{2}y'' + \frac{3}{2}y' - y = 0$

2. Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative passe par le point A(0, 1) et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 8
On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y'' + 2y' + y = x + 3$.
Déterminer les réels a et b pour que la fonction $h : x \longmapsto ax + b$, soit solution de (E).

Exercice 9
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto (1 + x)e^{-2x}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que f soit solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$.
2. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10
Soient les équations différentielles : (E_0) : $y' + y = 0$ et (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos x$.

1. Trouver les réels a et b pour que la fonction $h : x \longmapsto (a\cos x + b\sin x)\,\mathrm{e}^{-x}$ soit solution de (E).
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).
3. Résoudre (E_0).
4. Déduire des questions précédentes la solution générale de (E).
5. Déterminer la solution g de (E) telle que $g(0) = 1$.

Exercice 11
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = -2\mathrm{e}^{-x}$.

1. Monter que la fonction h définie par : $h(x) = -x^2\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y'' + 2y' + y = 0$.
3. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E').

4. En déduire la solution générale f de (E).
5. Déterminer la solution g de (E) satisfaisant aux conditions initiales : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$.

Exercice 12
On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (E) : $y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}$.

1. Vérifier que la fonction $g : x \longmapsto (x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution de(E).
2. Démontrer qu'une $f+g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de $y' + 2y = 0$.
3. Déduire des questions précédentes la solution générale de (E).

Exercice 13 1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

2. Déterminer la solution de f qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.
3. On pose $F(x) = -\frac{1}{5}\left(f'(x) + 2f(x)\right)$.
   (a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis expliciter $F(x)$.
   (b) En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

Exercice 14
Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique.
La puissance du son émis, initialement de 100 watts, diminue avec le temps t, mesuré en secondes.
On modélise par f(t) la puissance du son émis, exprimée en watt, t secondes après le pincement de la corde. Le son s'affaiblit à une vitesse proportionnelle à sa puissance, il a été établi que le coefficient de proportionnalité est de $-0,12$.

1. Écrire l'équation différentielle traduisant la diminution de son.
2. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 100.
3. Quelle est la puissance du son deux secondes après le pincement de la corde ? Arrondir au watt près.
4. Résoudre par le calcul l'équation f(t) = 60, on donnera la valeur exacte et la valeur approchée à 10^{-3} . Interpréter ce résultat

Exercice 15
Un condensateur de capacité C farads est chargé sous une tension initiale de 20 volts.
Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R ohms. En notant $u(t)$ la mesure de la tension en volts au bout de t secondes aux bornes du condensateur, u est alors une fonction définie sur $[0; +\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{RC}y = 0$

2. Résoudre l'équation et en déduire la fonction u.
3. Pour cette question, $R = 1000$ et $C = 10^{-4}$. Pendant combien de temps (au centième de seconde près) la tension aux bornes du condensateur reste-elle supérieure ou égale à 5 volts ?

Résolution de problèmes

Exercice 16
Le nombre de bactéries $N(t)$ d'une culture initialement à 600 passe au bout de 2 heures à 1 800.
On suppose que le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries présentes.

1. Donner une équation différentielle qui traduit le problème puis déterminer $N(t)$ à l'aide des conditions imposées.
2. Déterminer le nombre de bactéries après 4 heures.
3. Déterminer le temps t nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12 000.

Exercice 17
Monsieur Diop est promoteur d'une entreprise agricole. Il a acquis nouvellement une vaste terre plane sur laquelle , il projette y produire de la papaye Il soumet son projet à un conseil d'ingénieurs pour une étude de marché afin de lui présenter les atouts bénéficiaires sur ce produit.
Le conseil à la fin de cette étude basée sur un repère orthonormé d'unité graphique 1cm pour 100 m, adresse ses solutions à Pierre, un élève compétent en stage auprès du conseil, en ces termes :
«Le bénéfice à réaliser en milliers de francs en fonction de la quantité x de papayes en tonnes par an est donné par la fonction h telle que $h(x)'' - 3h(x)' + 2h(x) = 0$ et dont la courbe intégrale passe par le point A$(0\,;\ 15000)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 10000.»

Tâche :
Déterminer le bénéfice maximal annuel à réaliser par l'entreprise de monsieur Diop s'il se lance dans la production de papayes.

Exercice 18
Le taux de croissance d'une population de girafes dans un parc national peut être modélisé par l'équation différentielle $\frac{dP}{dt} = 0,0002P(200-P)$ où t est exprimé en années.
On sait qu'il y avait 30 girafes quand les scientifiques commençaient à étudier cette population.
Tâches
Détermine :

1. Le nombre d'années qu'il faut pour cette population de girafes atteignent 150.

2. Quel maximum cette population peut-elle atteindre ?