Calcul de dérivées (TS2)

Exercice 1
Montrer les dérivées suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{2x-3}{(2x+1)^2} \qquad f'(x) = \dfrac{-4x+14}{(2x+1)^3}$
2. $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{2x+1} \qquad g'(x) = \dfrac{2x^2+3x}{2\sqrt{x}(2x+1)^2}$.
3. $f(x) = \sin^2 x \cos 2x \qquad f'(x) = 2\sin x \cos 3x$
4. $h(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}} \qquad h''(x) = \dfrac{6x-3}{4\left(\sqrt{x-x^2}\right)^5}$
5. $k(x) = \dfrac{1+\cos 3x}{\cos^3 x} \qquad k'(x) = \dfrac{3\sin x(1-2\cos x)}{\cos^4 x}$

Exercice 2
Calculer la dérivée f' dans chacun des cas suivants en simplifiant le résultat :

1. $f(x) = \dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^3-1}}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}$
3. $f(x) = (x^2-1)\sqrt{1-x}$
4. $f(x) = 5\sin^2(3x-1)$
5. $f(x) = -\cos 2x + 2\sin^2 x$
6. $f(x) = x(1-\cos x)^2$

Exercice 3
Le but de l'exercice est d'appliquer la formule suivante $((f \circ g))'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Calculer la dérivée des fonctions $x \longmapsto g\left(\sqrt{x}\right)$ et $x \longmapsto g(\tan x)$.
2. Exprimer en fonction de $g(x)$ la dérivée des fonctions $x \longmapsto \sqrt{g(x)}$ et $x \longmapsto \tan(g(x))$.

Exercice 4
Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{si} \leq 1. \\ 2\cos(x-1) & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
Calculer $f'(x)$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x+1+\dfrac{4x}{x^2+1} & \text{si } x < -1. \\ 2x+\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$

1. Étudier la continuité de f en -1.
2. Étudier la dérivabilité de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. Étudier la dérivabilité de f sur $]-\infty;\ -1[$ et $]-1;\ +\infty[$.
4. Calculer $f'(x)$ puis établir le tableau de variation de f.

Exercice 6

Les questions sont indépendantes

1. Déterminer les abscisses des points de la courbe de la fonction $x \mapsto x^3$ où la tangente parallèle à la droite $y = 6x - 1$.
2. Si $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$ alors $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 2 une tangente d'équation $\cdots$
3. Si $f'_d(1) = -3$ et $f'_g(1) = 0$ alors $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 1 $\cdots$

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit une fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— la tangente à $\mathscr{C}$ au point A$(1; -2)$ est paralléle à l'axe des abscisses;

— la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est paralléle à la droite $2x + y + 3 = 0$.

Déterminer les réels a, b et c.