Fonctions continues et T.V.I

Exercice 1
Recopier et compléter les pointillés.

1. Si la fonction u est .... alors la fonction $\sqrt{u}$ est continue sur l'intervalle I.
2. Si une fonction f est .... sur un intervalle $[a,b]$ et si .... alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur $[a,b]$.
3. Si une fonction f est .... sur l'intervalle $[2,3]$ et si .... alors l'équation $f(x)=m$ admet au moins une solution sur $[2,3]$.
4. Dans un repère orthonormal la courbe d'une fonction bijective et celle de sa réciproque sont symétriques ....

Exercice 2
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera la réponse.

1. La fonction définie par $h(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0.
2. L'image d'un intervalle par une fonction est un intervalle.
3. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est continue sur $]-\infty\,;\,-1]$.
4. Si f est continue sur un intervalle I et si $m \in$ f(I) alors l'équation f(x) = m admet au moins une solution dans I.
5. Soit la fonction u telle que $x-2 \leq u(x) \leq x+3$ pour tout $x>1$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}=+\infty$.
6. Si f est continue et monotone sur un intervalle I alors elle réalise une bijection de I vers $f(I)$.

Exercice 3
Montrer que la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x+2}{x}-(x-1)\sqrt{x+1}$ est continue sur $]0,\,+\infty[$ puis justifier que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $]0,\,+\infty[$.

Exercice 4

1. Soit la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-2x-3}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de h.
   (b) Étudier la limite de h en 3.
   (c) Définir le prolongement par continuité de h en 3.
2. Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)(x+1)}$.

(a) Montrer que g est continue sur $]-1;+\infty[$.

(b) Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet au moins une solution dans $]-0,7\,;\,-0,6[$.

Exercice 5

On considère la fonction f de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1+\dfrac{3x}{x-2} & \text{si } x>1 \\ -x+\sqrt{1-x} & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
2. Étudier les limites de f aux bornes de D_f.
3. Étudier la continuité de f en 1 puis sur les intervalles $]-\infty,\,1[$, $]1,2[$ et $]2,\,+\infty[$.
4. Étudier la nature des branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.
5. Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote oblique.