Nombres complexes 2

Initiation sur les nombres complexes

Exercice 1

1. Rappeler la forme trigonométrique d'un nombre complexe z.
2. Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes z suivants.

   a) $z = 2\sqrt{3} - 6\mathrm{i}$ **b)** $z = -\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $z = (2+2\mathrm{i})\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^2$ **d)** $z = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

   e) $z = (-3+3\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ **f)** $z = 1 + \cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta$ **g)** $z = \sin\dfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$

   h) $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1-\sqrt{2}+\mathrm{i}}$

Exercice 2

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$$z_1 = (1+\mathrm{i})^{17} \quad z_2 = \left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{2021} \quad z_3 = \frac{(1+\mathrm{i})^3}{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^4} \quad z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \quad z_5 = \frac{-\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^2}{2\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^7}$$

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$, $3+2\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.

1. Donner une mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\vec{u},\overrightarrow{OA})$, $(\vec{u},\overrightarrow{OC})$, $(\vec{v},\overrightarrow{OA})$,$(\vec{v},\overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
2. Soit $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
   (a) Calculer $|Z|$ et un argument Z.
   (b) Interpréter géométriquement $|Z|$ et un argument Z. En déduire la nature du triangle ABC .

Exercice 4

Soit $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$, $z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire Z sous forme algébrique.
2. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
3. En déduire Z sous forme trigonométrique.
4. Déterminer les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 5
Soit $\omega = \sqrt{3}+1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$

1. Ecrire ω^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et un argument de ω^2. En déduire le module et un argument de ω.

Exercice 6
Identifier la réponse juste et donner la justification.

1. Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de $\frac{9}{z}$ alors un argument de $\frac{\mathrm{i}}{z^2}$ est :
   a) $\frac{\pi}{6}$ **b)** $-\frac{5\pi}{6}$ **c)** $\frac{5\pi}{6}$
2. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :
   a) $-\frac{\pi}{3}+\theta$ **b)** $\frac{2\pi}{3}+\theta$ **c)** $\frac{2\pi}{3}-\theta$
3. Un argument de $\sin(x)+\mathrm{i}\cos(x)$ est :
   a) $-x$ **b)** x **c)** $\frac{\pi}{2}-xv$ **d)** $\frac{\pi}{2}+x$
4. Le nombre complexe $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{1689}$
   a/ est un réel **b/** est un imaginaire pur **c/** n'est ni réel ni imaginaire pur.
5. Le conjugué de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est :
   a) $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ **b)** $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ **c)** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Exercice 7
On considère les trois nombres complexes suivants : $z_1 = (1-i)(1+2i)$, $z_2 = \frac{2+6i}{3-i}$ et $z_3 = \frac{4i}{i-1}$.
Soit M_1 , M_2 et M_3 leurs images respectives dans le plan.

1. Donner leurs formes agébriques.
2. Placer M_1 , M_2 et M_3 dans le plan complexe.
3. Calculer $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$. En déduire que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle isocèle .
4. Déterminer l'affixe du point M_4 telle que le quadrilatère $M_1M_2M_4M_3$ soit un carré .
5. Montrer que les points M_1 ,M_2 , M_3 et M_4 appartiennent à un même cercle dont on précisera les éléments .

Exercice 8
$x \in \mathbb{R}$. Soient les nombres complexes suivants :

$Z' = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $Z = (1-x)\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

1. Calculer le module et un argument de Z'.
2. Calculer le module et un argument de Z.
   (On discutera selon les valeurs de x)
   Donner pour chaque cas la forme trigonométrique et la forme algébrique de Z.
3. Montrer que Z^{2004} est un nombre réel dont on précisera le signe.
4. Montrer que l'équation $|Z| = 2$ a deux solutions Z_1 et Z_2.
   Ecrire Z_1 et Z_2 forme algébrique.
5. Placer les points A et B d'affixes respectives $2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $-2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   Vérifier que les points A, B et O sont alignés.